А. П. КИСЕЛЁВ

АЛГЕБРА

8-10 класс

ВРЕМЕНА

Издательство АСТ

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72
К44

Киселёв, Андрей Петрович.

К44 Алгебра. 8–10 класс / А. П. Киселёв. — Москва : Издательство АСТ, 2025. — 384 с. — (Лучшие советские учебники).

ISBN 978-5-17-175782-3

Настоящая книга — вторая часть знаменитого пособия по алгебре, предназначенная уже для 8–10 классов, от выдающегося учёного, новатора своей области и законодателя школьной математики А.П. Киселёва, методы которого помогли не одному поколению нашей страны поддерживать достойный уровень подготовки по этой дисциплине.

Его главная задача всегда заключалась в том, чтобы сделать предмет доступным и понятным для обучающихся. Поэтому его книги написаны ясным и простым языком для лёгкости освоения, а сжатость изложения помогает ускорить этот процесс. После прочтения вы узнаете о:

— квадратичных функциях;

— мнимых и комплексных числах;

— функциях и графиках;

— логарифмах

и многом другом.

«Алгебра. 8–10 класс» — находка для школьников, а также незаменимый помощник для родителей, педагогов и всех интересующихся математикой, стремящихся расширить свои знания в этой области.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-17-175782-3

Глава 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И КОРНЯМИ

I. Возведение в степень

1. Действие возведения в степень. В начале курса мы уже видели, что возведение в степень есть действие, посредством которого данное число (основание степени) берётся сомножителем столько раз, сколько единиц содержится в другом данном числе (показателе степени): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$; $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4 =$ $= 81$.

$$a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Вообще:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n.$$

2. Степень отрицательного числа. При умножении отрицательных чисел мы видели, что произведение бывает положительно, если число отрицательных множителей чётное. В противном случае произведение будет отрицательным. Применяя это свойство к произведению равных отрицательных сомножителей, т. е. возведению в степень отрицательного числа, мы получили правило (ч. I, § 30).

Чётная степень отрицательного числа положительна, нечётная — отрицательна.

Так: $(-2)^2 = 4$; $(-2)^6 = 64$; $(-5)^4 = 625$;
$(-2)^5 = -32$; $(-2)^7 = -128$; $(-5)^5 = -3125$ и т. п.

3. Возведение в степень одночленов. В первой части мы вывели правила возведения одночлена в квадрат и куб. Покажем теперь, что по тем же правилам производится возведение одночлена в любую степень.

а) Возведём в степень n произведение abc. Пользуясь известными свойствами умножения, получим:

$$(abc)^n = \underbrace{abc \cdot abc \cdot \ldots \cdot abc}_{n\ \text{раз}} = \underbrace{(aa \ldots a)}_{n\ \text{раз}} \cdot \underbrace{(bb \ldots b)}_{n\ \text{раз}} \underbrace{(cc \ldots c)}_{n\ \text{раз}} =$$
$$= a^n b^n c^n.$$

Чтобы возвести в степень произведение, надо возвести в эту степень каждый сомножитель отдельно и результаты перемножить.

б) Таким же способом найдём степень дроби $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\ \text{раз}} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Чтобы возвести в степень дробь, надо возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй.

в) Пусть требуется возвести в степень n число a^m. Будем иметь:

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} = a^{m+m+m+\ldots+m} = a^{mn}.$$

Чтобы возвести степень какого-либо числа в другую степень, надо перемножить показатели степеней.

г) Возьмём теперь какой-либо одночлен, например, $2a^2b^3$. Возведём его в какую-либо степень n. Применяя выведенные правила, получим:

$$(2a^2b^3)^n = 2^n a^{2n} b^{3n}.$$

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень коэффициент, а показатели букв умножить на показатель степени, в которую возводится одночлен.

Упражнения.

Произвести возведение в степень:

1. $(-3)^5$; $(-7)^3$; $(-4)^4$; $(-10)^6$; $(-0,1)^5$.
2. $(3a^2b)^3$; $(-2a^2b^2)^3$; $(-5a^4b^2c)^4$.
3. $\left(\dfrac{x^2y}{z^3}\right)^4$; $\left(-\dfrac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$; $\left(\dfrac{0,2a^3bc}{d^2}\right)^6$.

II. Возведение в квадрат многочлена

4. **Вывод формулы.** Пользуясь формулой $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, мы можем возвести в квадрат трёхчлен $a + b + c$, рассматривая его как двучлен $(a + b) + c$:

$$[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2.$$

Таким образом, с прибавлением к двучлену $a + b$ третьего члена c после возведения суммы в квадрат прибавились два члена: 1) удвоенное произведение суммы первых двух членов на третий член и 2) квадрат третьего члена.

Теперь нетрудно четырёхчлен $a + b + c + d$ возвести в квадрат, принимая сумму $a + b + c$ за один член:

$$[(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2.$$

Подставляя вместо $(a + b + c)^2$ то выражение, которое мы нашли раньше, получим:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + \\ +2(a + b + c) \cdot d + d^2.$$

Мы опять замечаем, что с прибавлением нового члена к возводимому в квадрат многочлену к степени прибавляются два члена: 1) удвоенное произведение суммы прежних членов на новый член и 2) квадрат нового члена. Очевидно, что такое прибавление к степени двух членов будет идти и дальше по мере прибавления новых членов к возводимому в квадрат многочлену. Значит:

Квадрат многочлена равен квадрату 1-го члена, плюс удвоенное произведение 1-го члена на 2-й, плюс квадрат 2-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й, плюс квадрат 3-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых трёх членов на 4-й, плюс квадрат 4-го члена и т. д.

Конечно, члены многочлена могут быть и отрицательными.

Если в правой части последнего равенства раскроем скобки, то получим после перестановки членов:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + \\ + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Можно поэтому предыдущее правило формулировать так:

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с удвоенными произведениями каждого члена на каждый из последующих.

5. Замечание о знаках. В окончательном результате возведения в квадрат многочлена со знаком плюс окажутся, во-первых, квадраты всех членов многочлена и, во-вторых, те удвоенные произведения, которые появились при умножении членов с одинаковыми знаками.

Например:

$$(3x^2 - x + 1)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot (3x^2) \cdot (-2x) + (-2x)^2 +$$
$$+ 2(3x^2 - 2x) \cdot 1 + 1^2 = 9x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 6x^2 - 4x + 1 =$$
$$= 9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1.$$

Упражнения.

4. $\left(2a^2 - \frac{1}{2}a + 1\right)^2$. 5. $\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x - 3\right)^2$.

6. $(-5a^3x + 3a^2x^2 - ax^3 + 3x^4)^2$.

7. $\left(0{,}3x^3 - 0{,}1x^2 - \frac{3}{4}x + 0{,}5\right)^2$.

Убедиться на следующих двух примерах, что квадрат многочлена не изменится, если мы переменим знаки перед всеми его членами на обратные:

8. $(a - b + c)^2 = (-a + b - c)^2$.

9. $(2x^3 - x^2 - 3x + 1)^2 = (-2x^3 + x^2 + 3x - 1)^2$.

10. Если верно равенство $(a - b)^2 = (m - n)^2$, можно ли из него заключить, что $a - b = m - n$?

III. Понятие об иррациональных числах

6. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Как известно из геометрии, *общей мерой* двух отрезков прямой называется такой отрезок, который в каждом из них содержится целое число раз без остатка. В геометрии разъясняется, что могут быть такие два отрезка, которые не имеют общей меры (например, сторона квадрата и его диагональ).

Два отрезка называются *соизмеримыми* или *несоизмеримыми* между собой, смотря по тому, имеют ли они общую меру или не имеют.

7. Понятие об измерении. Пусть требуется измерить длину отрезка AB (см. рис. 1) при помощи единицы длины CD. Для этого узнаем, сколько раз единица CD содержится в AB. Пусть окажется, что она содержится в AB 3 раза с некоторым остатком EB (меньшим CD). Тогда число 3 будет *приближённым результатом измерения с точностью до* 1, и притом с недостатком, так как AB больше $3CD$, но меньше $4CD$ (число 4 тоже можно назвать приближённым результатом измерения с точностью до 1, но с избытком). Желая получить более точный результат, узнаем, сколько раз в остатке EB содержится $\frac{1}{10}$ единицы CD.

Положим, что эта доля содержится в EB более 8, но менее 9 раз. Тогда числа 3,8 и 3,9 будут *приближёнными результатами измерения отрезка AB с точностью до* $\frac{1}{10}$: первое число с недостатком, второе — с избытком.

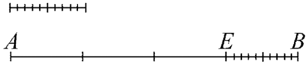

Рис. 1

Желая получить ещё более точный результат измерения, узнаем, сколько раз в последнем остатке содержится $\frac{1}{100}$ единицы *CD*. Пусть эта доля содержится в остатке более 5, но менее 6 раз. Тогда числа 3,85 и 3,86 будут *приближёнными результатами измерения отрезка AB с точностью до* $\frac{1}{100}$ Можно продолжать такое измерение всё далее и далее. При этом возможны два случая:

1) может случиться, что при последовательных измерениях с точностью до 0,1, 0,01, 0,001, ... рано или поздно не получится никакого остатка;

2) может случиться, что с какой бы точностью до 0,1, 0,01, 0,001, ... мы ни измеряли, остаток всегда будет получаться.

В первом случае в результате измерения получится конечная десятичная дробь. Во втором случае в результате измерения получится бесконечная десятичная дробь.

Конечная десятичная дробь получается лишь в том случае, если какая-нибудь десятичная доля единицы (одна десятая, или одна сотая, или одна тысячная и т. д.) является общей мерой измеряемого отрезка и единицы длины.

Если же измеряемый отрезок соизмерим с единицей длины, но ни $\frac{1}{10}$, ни $\frac{1}{100}$, ни $\frac{1}{1000}$, вообще никакая десятичная доля единицы не является общей мерой измеряемого отрезка и единицы длины, то в результате измерения получается бесконечная периодическая[1] десятичная дробь.

[1] Действительно, в случае соизмеримости мы всегда могли бы получить точный результат измерения в виде обыкновенной дроби. Обратив эту обыкновенную дробь в десятичную, мы выразили бы

Наконец, если измеряемый отрезок несоизмерим с единицей длины, то в результате измерения получается бесконечная непериодическая десятичная дробь.

8. Иррациональные числа и их приближённые значения. Числа целые и дробные носят общее название *рациональных* чисел. Всякое рациональное число может быть записано в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби; десятичные бесконечные непериодические дроби называются *иррациональными* числами. Рациональные числа служат мерой величин, соизмеримых с единицей, иррациональные числа – мерой величин, несоизмеримых с единицей[1].

Иррациональное число считается *известным* (или *данным*), если указан способ, посредством которого можно находить любое число его десятичных знаков.

Обрывая на каком-нибудь десятичном знаке бесконечную десятичную дробь, выражающую данное (рациональное или иррациональное) число, получаем *при-*

результат измерения в виде десятичной дроби. Но обыкновенная дробь, обращаясь в бесконечную десятичную, даёт всегда периодическую дробь. В случае же несоизмеримости измеряемого отрезка бесконечная десятичная дробь не может оказаться периодической, так как если бы она была такой, то её можно было бы обратить в обыкновенную, тогда эта обыкновенная дробь была бы точным результатом измерения, а такого результата не может быть в случае несоизмеримости. Значит, в этом случае бесконечная десятичная дробь должна быть непериодической.

[1] Латинское слово ratio означает отношение. Рациональные числа — те, которые могут быть представлены в виде отношения двух целых чисел, иррациональные — те, которые в таком виде представлены быть не могут.

ближённое значение этого числа *с точностью до* 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. с *недостатком.* Увеличивая на 1 последний сохранённый десятичный знак, получим приближённое значение данного числа с той же точностью, но *с избытком.*

Примеры.

1) Записывая число $\frac{1}{3}$ в виде бесконечной периодической дроби 0,33333... и сохраняя первые четыре десятичных знака этой дроби, получим приближённое значение числа $\frac{1}{3}$ с точностью до 0,0001 с недостатком: 0,3333.

Приближённое значение этого числа с точностью до 0,0001 с избытком есть 0,3334.

2) Иррациональное число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, записывается в виде бесконечной десятичной дроби, первые 25 знаков которой суть: 3,141592653589793238462643.

Приближённые значения числа π с точностью до 0,00001 суть 3,14159 (с недостатком) и 3,14160 (с избытком).

3) Возьмём иррациональное число, выражающееся следующей бесконечной непериодической десятичной дробью: 123,10100100010000100000100000001... (между двумя последовательными единицами стоит один нуль, потом два нуля, потом три нуля и т. д.).

Приближённые значения этого иррационального числа с точностью до 0,000000000001 (т. е. до $\frac{1}{10^{12}}$) суть 123,101001000100 (с недостатком) и 123,101001000101 (с избытком).

9. Равенство и неравенство между иррациональными числами. Вещественные числа. Два иррациональных числа считаются равными, если они выражены десятичными дробями с соответственно одинаковыми цифрами[1]. Из двух положительных иррациональных чисел больше то, которое при разложении в десятичную дробь содержит в себе большее число целых, или – при равенстве целых – большее число десятых, или – при равенстве целых и десятых — большее число сотых, и т.д. Например, число 2,745037... больше числа 2,745029..., так как в первом 6-я цифра выражает число большее, чем 6-я цифра во втором, при равенстве всех предыдущих цифр.

Это определение годится также и для сравнения иррационального числа с рациональным, если рациональное число разложено в десятичную дробь. Оно пригодно и для сравнения двух рациональных чисел, разложенных в десятичные дроби, если десятичные дроби с периодом 9 заменять на десятичные дроби, кончающиеся нулями: например, надо вместо 2,39999... брать 2,400000... .

Заметим, что из приведённого определения неравенств следует:

Если α — какое-нибудь иррациональное число, a — какое-нибудь приближённое значение числа α с недостатком, b — какое-нибудь приближённое значение числа α с избытком, то

$$a < \alpha < b.$$

[1] Два равных *рациональных* числа могут иногда выражаться неодинаковыми цифрами, а именно тогда, когда одно из них есть периодическая дробь с периодом 9. Так, 0,999... = 1; 2,3999... = 2,4.

Иррациональные числа могут быть положительными и отрицательными, сообразно со смыслом измеряемой величины. Как и в случае рациональных чисел, из двух отрицательных вещественных чисел бо́льшим считают то, у которого абсолютная величина[1] меньше; всякое отрицательное число меньше нуля, а нуль меньше всякого положительного числа.

Рациональные и иррациональные числа вместе называются вещественными, или действительными, числами.

10. Определение действий над иррациональными числами. Пусть α и β будут какие-нибудь данные положительные иррациональные числа (в нижеследующем примере $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{2}$). Пусть приближённые значения чисел α и β, взятые с недостатком, будут:

С точностью	до 0,1	до 0,01	до 0,001	до 0,0001
для числа α	1,7	1,73	1,732	1,7320
для числа β	1,4	1,41	1,414	1,4142

Соответствующие приближённые значения с избытком получаются из этих чисел посредством увеличения последнего десятичного знака на 1.

Тогда: а) Сложить α и β — значит найти число, которое было бы

больше каждой из сумм:	и меньше каждой из сумм:
$1{,}7 + 1{,}4 = 3{,}1$	$1{,}8 + 1{,}5 = 3{,}3$
$1{,}73 + 1{,}41 = 3{,}14$	$1{,}74 + 1{,}42 = 3{,}16$

[1] Для иррациональных чисел абсолютная величина определяется так же, как для рациональных.

$1{,}732 + 1{,}414 = 3{,}146$	$1{,}733 + 1{,}415 = 3{,}148$
$1{,}7320 + 1{,}4142 = 3{,}1462$	$1{,}7321 + 1{,}4143 = 3{,}1464$

и т. д., т. е.:

Сложить числа α и β — значит найти такое третье число γ, которое было бы больше суммы их любых приближённых значений, взятых с недостатком, но меньше суммы их любых приближённых значений, взятых с избытком.

Мы принимаем без доказательства, что такое число γ для любых двух вещественных чисел α и β существует, и притом только одно.

б) Беря приближённые значения чисел α и β, указанные выше, мы можем сказать, что произведение $\alpha \cdot \beta$ есть число, которое

больше каждого из произведений:	и меньше каждого из произведений:
$1{,}7 \cdot 1{,}4 = 2{,}38$	$1{,}8 \cdot 1{,}5 = 2{,}70$
$1{,}73 \cdot 1{,}41 = 2{,}4393$	$1{,}74 \cdot 1{,}42 = 2{,}4708$
$1{,}732 \cdot 1{,}414 = 2{,}449048$	$1{,}733 \cdot 1{,}415 = 2{,}452195$
$1{,}7320 \cdot 1{,}4142 = 2{,}44939440$	$1{,}7321 \cdot 1{,}4143 = 2{,}44970903$

и т. д., т. е.:

Перемножить положительные числа α и β – значит найти такое третье число, которое было бы больше произведения их любых приближённых значений, взятых с недостатком, но меньше произведения их любых приближённых значений, взятых с избытком.

Мы примем без доказательства, что такое число существует, и притом только одно.

в) **Возвести иррациональное число α во вторую, третью, четвёртую и т.д. степень — значит найти про-**

изведение, составленное из двух, трёх, четырёх и т.д. сомножителей, равных α.

г) Обратные действия определяются для иррациональных чисел так же, как и для рациональных: так, вычесть из числа α число β — значит найти такое число x, чтобы сумма $\beta + x$ равнялась α, и т. п.

Если одно из чисел α или β — рациональное и выражается конечной десятичной дробью, то в указанных определениях вместо приближённых значений такого числа надо брать его точное значение.

Произведение иррационального числа на нуль принимается, как и для рационального числа, равным нулю.

Действия над отрицательными иррациональными числами производятся согласно правилам, данным для рациональных отрицательных чисел.

При более обстоятельном рассмотрении можно установить, что *действия над иррациональными числами обладают теми же свойствами, что и действия над числами рациональными*: например, сложение и умножение обладают свойствами переместительным и сочетательным; умножение и деление, кроме того, обладают ещё распределительным свойством. Свойства, выражаемые неравенствами, также сохраняются для чисел иррациональных: так, если $\alpha > \beta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (при $\gamma > 0$) и $\alpha\gamma < \beta\gamma$ (при $\gamma < 0$) и т. п.

11. Извлечение корня. Определение. *Корнем n-й степени из числа a называется такое число, которое, будучи возведено в степень n, даёт a.*

Корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Из самого определения следует, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.