

МАТЕМАТИКА С БОРИСОМ ТРУШИНЫМ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
С НУЛЯ
ДО ПОНИМАНИЯ



БОМБОРА
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва

УДК 519.2
ББК 22.171
Т80

Трушин, Борис Викторович.

Т80 Математика с Борисом Трушиным. Теория вероятностей с нуля до понимания / Борис Трушин. — Москва : Эксмо, 2026. — 288 с. — (Математика с Борисом Трушиным).

ISBN 978-5-04-247259-6

Борис Трушин уже 27 лет учит математике школьников, студентов и учителей, является соавтором учебников по алгебре и 10 лет ведёт одноимённый канал по школьной и околешкольной математике.

Новая книга автора посвящена одному из самых жизненных разделов математики — теории вероятностей. Вы начнёте с самых азов: разберётесь, что такое вероятность, как правильно задавать вероятностную модель и почему интуиция в таких задачах часто подводит. Затем познакомитесь с формулой Байеса и испытаниями Бернулли, научитесь считать математические ожидания и дисперсии случайных величин и поймёте, откуда берётся закон больших чисел.

А в конце вас ждёт подборка красивых задач и «парадоксов» теории вероятностей: парадокс Монти Холла, нетранзитивные кости, Санкт-Петербургский парадокс и другие сюжеты, в которых интуиция легко подводит.

Всё это — в новой книге серии «Математика с Борисом Трушиным».

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 978-5-04-247259-6

© Борис Трушин, текст, 2026
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Что такое вероятность?	9
Введение	11
Частота и вероятность	16
Классическое определение вероятности	20
Противоположное событие	24
Первые примеры	25
Учимся правильно рассуждать	28
Вероятность вытянуть короткую спичку	33
Глава 2. Сложение и умножение вероятностей	39
Независимые события	41
Про «и» и «или»	47
Условная вероятность	64
Читерский способ решения задач	74
Мультивселенные теории вероятностей	76
Глава 3. Формула Байеса	85
Обратная задача	87
Формула Байеса	91
Формула полной вероятности	97
Глава 4. Испытания Бернулли	105
Успех и неудача	107
Формула Бернулли	113
Хотя бы один успех	119
Наиболее вероятное число успехов	122

Глава 5. Математическое ожидание и дисперсия	131
Случайная величина	133
Распределение случайной величины	136
Математическое ожидание	142
Линейность математического ожидания	147
Ожидание первого успеха	154
Независимые случайные величины	159
Дисперсия	164
Аддитивность дисперсии	172
 Глава 6. Закон больших чисел	 177
Почему частота должна приближаться к вероятности	179
Математическое ожидание и дисперсия числа успехов в схеме Бернулли	181
Неравенство Чебышёва	184
Закон больших чисел для схемы Бернулли	188
 Глава 7. Несколько красивых задач	 193
Задача Бертрана о коробках	195
Нетранзитивные кости	197
Задача про сумасшедшую старушку	200
Парадокс Монти Холла	203
Парадокс дней рождения	211
Санкт-Петербургский парадокс	214
Два орла подряд	216
Коллекционер наклеек	221
Задача о разорении игрока	225
Пьяница у обрыва	227
Игра в «пальчики»	229
Монетка из шоу	237
 Решения задач	 247
 Предметный указатель	 281

ПРЕДИСЛОВИЕ

Всем привет! Меня зовут Борис Трушин, и я учитель математики. Я преподаю математику школьникам, студентам и учителям уже 27 лет, являюсь соавтором учебников по алгебре, а последние десять лет веду канал «Борис Трушин» по околошкольной математике.

Перед вами четвёртая книга из серии «Математика с Борисом Трушиным». По структуре она ближе всего к «Комбинаторике»¹ и «Теории чисел»². В этой книге мы с нуля разберёмся в основах теории вероятностей.

Книга рассчитана на широкий круг читателей – от шестиклассников до людей, давно окончивших школу. Для чтения не нужны специальные предварительные знания: мы начнём с интуитивного представления о вероятности и постепенно пройдем путь до содержательных утверждений и задач, в

¹Трушин Б. В. Комбинаторика: с нуля до олимпиад. – М.: Бомбора, 2023.

²Трушин Б. В. Теория чисел: с нуля до теоремы Эйлера. – М.: Бомбора, 2024.

которых простые на вид вопросы приводят к неожиданным ответам.

Вы узнаете о формуле Байеса и испытаниях Бернулли, научитесь считать математические ожидания и дисперсии случайных величин и поймёте, откуда берётся закон больших чисел. А в конце вас ждёт подборка красивых задач и вероятностных «парадоксов»: парадокс Монти Холла, парадокс дней рождения, нетранзитивные кости, Санкт-Петербургский парадокс и другие сюжеты, где первый интуитивный ответ часто оказывается неверным.

При этом главная цель книги не в том, чтобы выучить несколько формул. Формулы в теории вероятностей обычно не очень сложны. Гораздо важнее научиться правильно задавать вероятностную модель, понимать, какие предположения в неё заложены, и отличать аккуратное математическое рассуждение от поспешной догадки. В теории вероятностей особенно важно помнить, что мы считаем не саму жизнь, а математическую модель ситуации.

Если вы уже немного знакомы с теорией вероятностей, хорошо понимаете классическое определение вероятности, не путаете несовместные и независимые события и имеете представление об условной вероятности, то можете смело пропустить первые две главы, останавливаясь лишь на задачах, которые вызовут у вас интерес.

Старайтесь самостоятельно решать все предложенные здесь задачи. Но в любом случае у вас всегда будет возможность посмотреть подробные решения: они приведены в конце книги. Рядом с неко-

торыми задачами на полях вы можете встретить значок $\cup$. Он означает, что у этой задачи есть интерактивная онлайн-демонстрация: можно запустить случайный эксперимент, изменить параметры и посмотреть, как ведут себя вероятности, частоты или средние значения. Все такие демонстрации собраны на странице

<https://trushinbv.ru/probability-book>

Приятного вам чтения!

Post scriptum. Как обычно, хочу выразить благодарность всем тем, кто учил меня математике в школе и в вузе. Всё, что я умею в математике и знаю о её преподавании, – всё благодаря этим замечательным людям.

В первую очередь это мой отец, Трушин Виктор Борисович, без которого я никогда бы не узнал и не полюбил математику. А также Петрович Александр Юрьевич, Терёшин Дмитрий Александрович, Карасёв Роман Николаевич, Подлипский Олег Константинович, Чубаров Игорь Андреевич, Балашов Максим Викторович, Курочкин Сергей Владимирович, Бесов Олег Владимирович, Половинкин Евгений Сергеевич и ещё пара десятков потрясающих учителей и преподавателей, у которых мне посчастливилось когда-то учиться.

Спасибо вам: без вас не было бы не только этой книги, но и меня как учителя математики.

Отдельное спасибо моему AI-помощнику ChatGPT, который был внимательным редактором и собеседником: помогал отлавливать арифметические ошиб-

ки и опечатки, делать первичную редактуру текста, продумывать структуру книги и формулировки отдельных разделов.

21 августа 2026 года

Борис Трушин

ГЛАВА

1

**ЧТО ТАКОЕ
ВЕРОЯТНОСТЬ?**

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей, наверное, самая повседневная часть математики. С геометрией мы явно сталкиваемся, когда пытаемся что-то смасштабировать, сделать чертёж или разобраться с формой предмета. С алгеброй – когда что-то вычисляем, составляем формулу или решаем уравнение.

А с вероятностью мы сталкиваемся постоянно. В прогнозе погоды говорят о вероятности дождя, букмекеры оценивают шансы команд, любители лотерей интересуются шансами выиграть джекпот, медицинские тесты могут давать ложноположительные и ложноотрицательные результаты, страховые компании рассчитывают риски аварий и болезней, банки оценивают риск невозврата кредита, а социологи по опросу нескольких тысяч человек пытаются судить о мнении миллионов.

Порой мы и сами задаёмся вопросом, насколько вероятным было совпадение, которое произошло в нашей жизни. Что уж говорить об азартных играх – там без оценки вероятностей вообще трудно понять, что на самом деле происходит.

В этом смысле теория вероятностей может показаться довольно простой. Даже слишком простой. Бросили монетку – выпал либо орёл, либо решка. Бросили кубик – выпало одно из шести чисел. Купили лотерейный билет – либо выиграли, либо не выиграли. Всё вроде бы понятно. Но что такое вероятность и как её посчитать?

Когда мы говорим «вероятность», мы почти всегда говорим не о реальной жизни, а о некоторой математической модели. Мы не просто бросаем монетку, а предполагаем, что она не встаёт на ребро, что после броска обязательно получится либо орёл, либо решка и что эти два исхода в каком-то смысле равноправны. Мы не просто бросаем кубик, а предполагаем, что он «правильный», что все шесть граней выпадают «одинаково часто».

Но что значит «равноправны»? Или, как часто говорят в школьных задачах, «равновозможны»? На первый взгляд кажется, что всё понятно: монетка симметрична, у неё две стороны, почему бы одной стороне выпадать чаще другой? Но это рассуждение ещё не является строгим определением. Мы пока даже не объяснили, что такое вероятность, а уже пытаемся сказать, что две вероятности одинаковы.

В этом и состоит одна из первых трудностей теории вероятностей. Слова «случайно», «наугад», «равновозможно» звучат очень обыденно, но сами по

себе они ещё не являются математическими определениями. В школьных задачах обычно поступают так: явно задают набор возможных исходов, а затем договариваются считать эти исходы равновероятными. Это не вывод из реальной жизни, а часть математической модели.

Поэтому в теории вероятностей особенно важно следить, где заканчивается жизненная интуиция и начинается математическая договорённость. Формулировка задачи подсказывает нам модель, и дальше мы должны работать уже внутри этой модели, честно помня, какие предположения в неё заложили.

Иначе возникает опасный круг: чтобы определить вероятность, мы хотим воспользоваться равновероятностью исходов; но чтобы строго объяснить равновероятность, нам уже нужно говорить о равенстве вероятностей. На школьном уровне этот круг обычно не разрывают полностью, а аккуратно обходят: равновероятность принимают как часть модели в тех задачах, где это разумно и явно оговорено.

Нужно понимать, что «равновероятность» – это не магическое свойство реального мира, а лишь условие рассматриваемой нами математической модели.

Например, фраза «выберем случайное натуральное число» звучит вполне естественно, но в теории вероятностей с ней уже возникают серьёзные проблемы. Натуральных чисел бесконечно много, и для них нельзя построить равномерную вероятностную модель, в которой все натуральные числа были бы

равновозможными. Можно задать какие-то вероятности выбора для отдельных натуральных чисел, но тогда разные числа уже не будут выбираться с одной и той же вероятностью.

Даже в более жизненном примере – когда кто-то говорит: «случайным образом выберем ученика школы» – тоже непонятно, что на самом деле имеется в виду. Можно собрать всех учеников в актовом зале и как-то выбрать одного из них. Можно сначала случайным образом выбрать класс, а потом выбрать ученика из этого класса. А можно просто стоять в коридоре и выбрать случайного ученика, который пробегает мимо. Во всех трёх случаях речь вроде бы идёт о «случайном ученике», но вероятностные модели получатся разными.

Поэтому теория вероятностей одновременно очень близка к жизни и очень требовательна к аккуратности. В ней легко начать рассуждать «по здравому смыслу», но этот здравый смысл часто незаметно подменяет математическую модель.

Именно поэтому на школьном уровне невозможно построить всю теорию вероятностей с полной современной строгостью. Для такой строгости нужны понятия, которые появляются значительно позже: бесконечные множества исходов, непрерывные распределения, предельные переходы, а в современной теории – ещё и язык меры. Без этого невозможно построить полную строгую математическую теорию.

Но из этого не следует, что «школьная» теория вероятностей обречена быть набором фокусов и нестрогих рассуждений. Наоборот: многое можно

рассказать вполне честно, если с самого начала договориться о границах.

В этой книге мы будем в основном работать с конечными вероятностными моделями. То есть с такими ситуациями, где множество исходов можно явно описать и посчитать. Монеты, кубики, карты, мешочки с шарами, случайный выбор из конечного набора объектов – всё это «школьная территория», на которой можно рассуждать достаточно строго.

Кроме этого, мы совсем чуть-чуть заглянем в более сложные разделы теории вероятностей. Но ровно настолько, чтобы не потерять ни в строгости рассуждений, ни в понятности для широкого круга читателей.

Решая задачи, мы будем постоянно задавать себе три вопроса:

- В чём состоит наш случайный эксперимент?
- Каковы его возможные исходы?
- Какие вероятности мы приписываем этим исходам и почему?

Только после этого имеет смысл что-то начинать считать!

Главная цель этой книги – не в том, чтобы выучить несколько формул. Формулы в теории вероятностей не так уж и сложны. Главная цель – научиться правильно задавать модель. Потому что ошибка чаще всего происходит не в арифметике, а раньше: в момент, когда мы решили, что все исходы «очевидно» равновозможны, что события «очевидно» независимы или что какая-то дополнительная информация «очевидно» ничего не меняет.