

**А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский,
М. С. Якир**

ЕГЭ МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА • ГЕОМЕТРИЯ

**Тематический тренинг
для подготовки
к единому
государственному
экзамену**

Москва
Издательство АСТ
2022

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М52

Мерзляк, Аркадий Григорьевич.

М52 ЕГЭ : Математика : Алгебра. Геометрия : тематический тренинг для подготовки к единому государственному экзамену / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва: Издательство АСТ, 2022. — 525, [3] с.: ил. — (ЕГЭ. Тематический тренинг).

ISBN 978-5-17-150841-8

Вниманию школьников и абитуриентов предлагается пособие для подготовки к ЕГЭ по математике, которое в полном объеме содержит теоретический материал, проверяемый на едином государственном экзамене, и тематические тренировочные задания по всем разделам арифметики, алгебры и геометрии.

Значительный по объёму банк экзаменационных заданий разных типов и уровней сложности позволяет акцентировать внимание на технологии работы с ними, что облегчит приобретение необходимых умений и навыков.

В конце книги даны ответы для самопроверки на все задания.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-150841-8

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., 2022
© ООО «Издательство АСТ», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	11
ГЛАВА I. АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА.	13
§ 1. Натуральные числа	15
1.1. Десятичная запись натуральных чисел.	15
1.2. Арифметические действия над натуральными числами	16
1.3. Делимость натуральных чисел	17
1.4. Признаки делимости	18
1.5. Простые и составные числа	19
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. .	20
1.7. Деление с остатком	22
§ 2. Дроби	27
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей.	27
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями	29
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей	30
2.4. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби	32
2.5. Округление чисел	33
2.6. Проценты	37
2.7. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам	38
2.8. Отношение. Процентное отношение	39
2.9. Пропорции	40
§ 3. Числовые множества	44
3.1. Понятие о множестве	44
3.2. Числовые множества	45
3.3. Координатная прямая	48
3.4. Модуль действительного числа	49
§ 4. Целые выражения	53
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения	53
4.2. Степень с натуральным показателем и её свойства.	53
4.3. Одночлен	55

Содержание

4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной	56
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов	57
4.6. Формулы сокращённого умножения	58
4.7. Разложение многочленов на множители	60
§ 5. Дробные выражения	65
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби	65
5.2. Тождество. Тождественные преобразования выражений	66
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей	66
5.4. Действия с алгебраическими дробями	68
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями.	73
5.6. Стандартный вид числа	74
§ 6. Корень n-й степени. Степень с действительным показателем.	77
6.1. Корень n -й степени и его свойства	77
6.2. Преобразование выражений, содержащих корни	79
6.3. Степень с рациональным показателем	85
6.4. Преобразование выражений, содержащих степень с рациональным показателем	86
6.5. Степень с действительным показателем	88
§ 7. Формулы тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений	94
7.1. Радианная мера угла. Угол поворота	94
7.2. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла поворота	96
7.3. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса	99
7.4. Основные тригонометрические тождества	100
7.5. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.	101
7.6. Формулы приведения	103
7.7. Формулы двойного угла. Формулы понижения степени	105
7.8. Формулы половинного угла. Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла	107
7.9. Сумма и разность синусов (косинусов)	108
7.10. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму	109
7.11. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс	110

Содержание

§ 8. Логарифмы	117
8.1. Логарифм числа	117
8.2. Свойства логарифмов	118
§ 9. Функции	121
9.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции	121
9.2. Способы задания функции	122
9.3. График функции. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы	123
9.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции	127
9.5. Чётные и нечётные функции	129
9.6. Периодические функции	130
9.7. Точки максимума и точки минимума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Ограниченные функции.	131
9.8. Обратная функция	134
9.9. Преобразования графиков функций	135
9.10. Линейная функция	139
9.11. Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$	141
9.12. Квадратичная функция	142
9.13. Степенная функция с натуральным показателем ($y = x^n, n \in N$).	157
9.14. Функция $y = \sqrt[n]{x}$	158
9.15. Функция $y = \sin x$ и $y = \cos x$	159
9.16. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$	161
9.17. Показательная функция ($y = ax, a > 0, a \neq 1$)	163
9.18. Логарифмическая функция ($y = \log ax, a > 0, a \neq 1$)	164
§ 10. Уравнения с одной переменной	170
10.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной	170
10.2. Линейное уравнение с одной переменной	172
10.3. Квадратное уравнение	172
10.4. Теорема Виета	174
10.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители.	175
10.6. Рациональные уравнения.	177
10.7. Метод замены переменной	180

Содержание

10.8. Уравнения, содержащие знак модуля	181
10.9. Иррациональные уравнения	183
10.10. Простейшие тригонометрические уравнения	188
10.11. Основные методы решения тригонометрических уравнений	190
10.12. Показательные уравнения	199
10.13. Логарифмические уравнения	201
10.14. Уравнения с параметрами	205
§ 11. Уравнения с двумя переменными и их системы	214
11.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения	214
11.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом	216
11.3. Методы решений системы двух уравнений с двумя переменными	219
§ 12. Применение математических методов для решения прикладных задач	228
12.1. Решение прикладных задач с помощью уравнений	228
12.2. Решение прикладных задач с помощью систем уравнений	233
12.3. Решение прикладных задач арифметическим способом	236
§ 13. Неравенства	241
13.1. Общие сведения о неравенствах с одной переменной	241
13.2. Числовые промежутки	242
13.3. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств	243
13.4. Квадратные неравенства	246
13.5. Метод интервалов	247
13.6. Показательные неравенства	255
13.7. Логарифмические неравенства	256
13.8. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств	258
13.9. Неравенство с двумя переменными и его график	263
13.10. Система неравенств с двумя переменными	264

Содержание

§ 14. Числовые последовательности	270
14.1. Понятие последовательности	270
14.2. Способы задания последовательности	271
14.3. Арифметическая прогрессия	273
14.4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии	274
14.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов.	275
14.6. Сумма n первых членов геометрической прогрессии	277
14.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы	278
§ 15. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики	281
15.1. Комбинаторные правила суммы и произведения	281
15.2. Перестановки, размещения, сочетания	282
15.3. Бином Ньютона	284
15.4. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	285
15.5. Статистика. Статистические характеристики	293
15.6. Частота и вероятность случайного события	294
15.7. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности	295
15.8. Вычисление вероятностей с помощью правил комбинаторики.	297
§ 16. Производная и её применение	304
16.1. Понятие производной	304
16.2. Геометрический и физический смысл производной	306
16.3. Правила вычисления производных. Производные основных элементарных функций	307
16.4. Уравнение касательной	310
16.5. Признаки возрастания и убывания функции	314
16.6. Точки экстремума функции	316
16.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.	318
16.8. Вторая производная и её физический смысл	320
16.9. Исследование свойств функции и построение её графика	321
§ 17. Первообразная и интеграл	327
17.1. Понятие первообразной. Неопределённый интеграл	327
17.2. Правила нахождения первообразной	329
17.3. Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл	331

ГЛАВА II. ГЕОМЕТРИЯ	339
§ 18. Треугольник	341
18.1. Виды треугольников	341
18.2. Признаки равенства треугольников	342
18.3. Свойства равнобедренного треугольника	343
18.4. Признаки равнобедренного треугольника	344
18.5. Сумма углов треугольника. Свойства внешнего угла треугольника	345
18.6. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника	347
18.7. Терема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках . . .	348
18.8. Свойства высот, медиан и биссектрис треугольника	349
18.9. Средняя линия треугольника	351
18.10. Подобные треугольники	352
18.11. Признаки подобия треугольников	353
18.12. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике	360
18.13. Теорема Пифагора	361
18.14. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника	362
18.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°	364
18.16. Теорема косинусов	366
18.17. Теорема синусов	367
§ 19. Окружность	371
19.1. Свойства элементов окружности	371
19.2. Касательная и секущая к окружности	372
19.3. Окружность, описанная около треугольника	373
19.4. Окружность, вписанная в треугольник	375
19.5. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности	376
19.6. Длина окружности. Площадь круга и площадь сектора	378
§ 20. Многоугольник	386
20.1. Параллелограмм и его свойства	386
20.2. Признаки параллелограмма	388
20.3. Прямоугольник, ромб, квадрат	389
20.4. Трапеция. Средняя линия трапеции	394

Содержание

20.5. Четырёхугольник, вписанный в окружность	396
20.6. Четырёхугольник, описанный около окружности	397
20.7. Сумма углов выпуклого многоугольника	398
20.8. Правильные многоугольники	398
§ 21. Площадь многоугольника	405
21.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника	405
21.2. Площадь параллелограмма. Площадь трапеции	406
21.3. Формулы для нахождения площади треугольника.	407
21.4. Площади подобных многоугольников	409
§ 22. Параллельность в пространстве	416
22.1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.	416
22.2. Параллельность прямой и плоскости	417
22.3. Параллельность плоскостей.	418
§ 23. Перпендикулярность в пространстве	425
23.1. Угол между прямыми в пространстве	425
23.2. Перпендикулярность прямой и плоскости	427
23.3. Расстояния в пространстве.	428
23.4. Теорема о трёх перпендикулярах	431
23.5. Угол между прямой и плоскостью	432
23.6. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями	433
23.7. Перпендикулярные плоскости.	435
§ 24. Многогранники	442
24.1. Призма	442
24.2. Параллелепипед	444
24.3. Пирамида	449
24.4. Усечённая пирамида	452
24.5. Правильные многогранники	453
§ 25. Круглые тела	458
25.1. Цилиндр. Комбинации цилиндра с призмой	458
25.2. Конус. Усечённый конус.	461
25.3. Комбинации конуса и усечённого конуса с пирамидой	463
25.4. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости	468
25.5. Многогранники, вписанные в сферу	470
25.6. Многогранники, описанные около сферы	472

Содержание

§ 26. Объёмы тел. Площадь сферы	476
26.1. Объём тела. Формулы для вычисления объёмов многогранников	476
26.2. Объёмы тел вращения.	480
26.3. Площадь сферы.	482
§ 27. Координаты и векторы в пространстве	486
27.1. Декартовы координаты точки в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка	486
27.2. Уравнение фигуры. Уравнение сферы	487
27.3. Векторы в пространстве. Координаты вектора	489
27.4. Сложение и вычитание векторов	491
27.5. Умножение вектора на число	495
27.6. Компланарные векторы. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам	497
27.7. Скалярное произведение векторов.	498
27.8. Уравнение плоскости	499
Ответы к примерам заданий	505

ПРЕДИСЛОВИЕ

На единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике выносятся темы курсов: «Математика» 5–6 классов, «Алгебра» 7–9 классов, «Алгебра и начала анализа» 10–11 классов, «Планиметрия» 7–9 классов, «Стереометрия» 10–11 классов. Основой подготовки к ЕГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–11 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Неудобства такого подхода очевидны: во-первых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; во-вторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобнее использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках.

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ЕГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.

Пособие состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов, алгебры 7–9 классов, алгебры и начал анализа 10–11 классов; вторая глава «Геометрия» — содержанию курса планиметрии 7–9 классов и стереометрии 10–11 классов. Каждая из глав разбита на параграфы. Их содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ЕГЭ по математике.

Понятно, что для успешного написания ЕГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в пособии включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ЕГЭ по математике.

Предисловие

Большинство проверочных работ состоят из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

Желаем вам успешной сдачи единого государственного экзамена по математике.

Авторы

ГЛАВА I

**АРИФМЕТИКА.
АЛГЕБРА**

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Десятичная запись натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**.

Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел** (или натуральный ряд). Первым числом натурального ряда является число 1, вторым — число 2, третьим — число 3 и т. д.

В натуральном ряде за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряде нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**. Этих цифр десять:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа. Например, в числе 172 цифра 7 обозначает число семьдесят, а в числе 7549 — обозначает число семь тысяч.

Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**.

Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе — **разрядом десятков**, третье — **разрядом сотен** и т. д. Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называют **десятичной**. Такое название связано с тем, что 10 единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего, старшего разряда.