

СОВЕТСКИЕ  УЧЕБНИКИ

РОСТИСЛАВ
БОНЧКОВСКИЙ

ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМЫ

ГЕОМЕТРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ
НА ПЛОСКОСТИ
И В ПРОСТРАНСТВЕ

КЛАССИКА НАУЧПОПА



МОСКВА

УДК 514(075)
ББК 22.15я7
Б81

В оформлении обложки использована иллюстрация:
Dream01 / Shutterstock / FOTODOM
Используется по лицензии от Shutterstock / FOTODOM

Печатается по изданию 1937 года

Бончковский, Ростислав Николаевич.

Б81 Площади и объемы. Геометрия измерения на плоскости и в пространстве / Ростислав Бончковский. — Москва : Эксмо, 2026. — 208 с. — (Советские учебники. Классика научпопа).

ISBN 978-5-04-248646-3

Книга Ростислава Бончковского «Площади и объемы» понятно и наглядно объясняет важнейшие темы измерительной геометрии: от площадей многоугольников и фигур, ограниченных кривыми линиями, до объемов многогранников, призм, пирамид и тел с кривыми поверхностями. Автор опирается на чертежи, рассуждения и задачи, помогая не просто запомнить формулы, а понять их геометрический смысл. Ясное изложение и широкий круг тем делают книгу хорошим введением в геометрическое мышление. Она будет полезна всем, кто хочет лучше разобраться в геометрии.

УДК 514(075)
ББК 22.15я7

ISBN 978-5-04-248646-3

© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2026

Оглавление



Предисловие	5
Глава первая. Площади многоугольников	9
Глава вторая. Звездчатые многоугольники и их площади	37
Глава третья. Площади, ограниченные кривыми линиями, и длины кривых линий	67
Глава четвертая. Многогранники	95
Глава пятая. Параллелепипеды и призмы	115
Глава шестая. Объемы произвольных многогранников	139
Глава седьмая. Объем пирамиды	159
Глава восьмая. Объемы тел, ограниченных кривыми поверхностями. Площади кривых поверхностей	171
Решения задач	199





ПРЕДИСЛОВИЕ

Эту книгу я писал для учащихся и передовых рабочих, желающих расширить свой умственный кругозор и повысить свои знания, но, несомненно, число ее возможных читателей значительно шире. В ней рассматриваются важнейшие понятия метрической (измерительной) геометрии — понятия о площади и объеме. Так как я писал не учебник, а книгу для свободного чтения, то я считал не только возможным, но даже необходимым выйти за рамки материала, обычно излагаемого в учебниках. В связи с этим пришлось затронуть многие смежные области геометрии, так что в целом книга охватывает обширный круг геометрических вопросов. Несмотря на это, для чтения книги требуется самая незначительная подготовка: из алгебры требуется знание действий над положительными

и отрицательными числами и понимание буквенных обозначений, т. е. то, что составляет программу шестого и седьмого классов школы; что же касается геометрии, то необходимо лишь знакомство с такими понятиями, как «прямой угол», «параллельные прямые», «перпендикуляр», «диагональ» и т. п. Все остальное объясняется в самой книге.

Изложение я постарался сделать возможно более наглядным. Читатель заметит, что в книге вовсе нет строгих логических доказательств; во всех случаях я старался создать перед умственным взором читателя отчетливую картину рассматриваемых соотношений, чтобы таким образом привести его к уяснению существа дела. В связи с такой системой изложения чертежи играют в этой книге очень значительную роль; читатель не должен относиться к ним как к чему-то постороннему, но должен рассматривать их самым внимательным образом.

Хочу предупредить читателя, что в своей книге я даю большую и трудную работу его воображению. Но мне представляется, что эта работа не пропадет даром. Она должна обогатить геометрическую фантазию читателя и тем самым поднять его умственные силы на новую, более высокую

ступень. Всякое техническое усовершенствование, будь то создание новой машины или рационализация производственного процесса, большей частью связано с решением ряда геометрических задач и потому может быть осуществлено лишь человеком, обладающим сильной геометрической фантазией. Но, как и другие способности человека, геометрическая фантазия развивается только при условии упражнения.

Р. Бончковский



Глава первая



ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Многие думают, что измерение и вычисление площадей — дело вовсе не трудное. Еще из школы каждый помнит, что для определения площади нужно измерить ее длину и ширину и полученные числа перемножить. Так, например, если комната имеет в длину 8 м*, а в ширину 4 м, то ее площадь равна $8 \times 4 = 32 \text{ м}^2$.

На рис. 1 изображен четырехугольник, ширина которого 2 см, а длина 2,5 см. Значит, площадь этого четырехугольника $2 \times 2,5 = 5 \text{ см}^2$. Что это действительно так, не трудно проверить. Вертикальная линия, проведенная посередине четырехугольника, делит его на две полосы одинаковой

* Буква м заменяет слово «метр», а м^2 — слова «квадратный метр».

ширины в 1 см. Проведем еще две горизонтальные линии, как это показано на рисунке; тогда четырехугольник распадется на шесть неодинаковых частей. Из них четыре нижние части представляют собой квадраты со сторонами в 1 см; значит, каждая из этих частей есть квадратный сантиметр. Что касается двух верхних частей, то каждая из них есть половина квадратного сантиметра и, значит, вместе они составляют один квадратный сантиметр. Всего, следовательно, мы имеем четыре полных квадратных сантиметра и один квадратный сантиметр, составленный из двух половинок, т. е. пять квадратных сантиметров, — как раз столько, сколько мы получили вычислением.

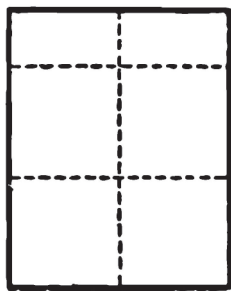


Рис. 1

Задача делается более трудной, если четырехугольник не имеет такой правильной

формы, как на рис. 1. Например, на рис. 2 изображен косой четырехугольник. Его ширина внизу меньше, чем вверху, а длина в правой части больше, чем в левой. Поэтому очевидно: наше правило здесь не применимо.

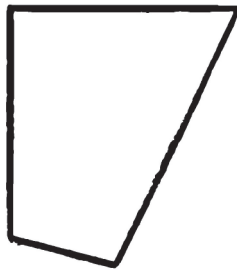


Рис. 2

Четырехугольник такой формы, как на рис. 1, называется прямоугольником. Можно сказать, что наше правило вычисления площадей верно только для прямоугольников. Только площадь прямоугольника можно найти, перемножая его длину на ширину.

Чтобы определить площадь какого-либо другого четырехугольника, стараются превратить его в прямоугольник, для чего разрезают его на части так, чтобы из этих частей можно было сложить прямоугольник. Очевидно, площадь полученного прямоугольника равна площади первоначального

четырехугольника: ведь они состоят из одинаковых частей.

Этот прием легче всего пояснить на примере превращения параллелограмма в прямоугольник. Параллелограмм обладает тем свойством, что его противоположные стороны параллельны друг другу, т. е. все точки одной стороны находятся на одном и том же расстоянии от противоположной стороны (рис. 3), но в отличие от прямоугольника углы параллелограмма не прямые. Одну из сторон параллелограмма считают его основанием; мы за основание параллелограмма, изображенного на рис. 3, принимаем сторону AB . Расстояние от основания до противоположной стороны параллелограмма считается его высотой; высоту нашего параллелограмма можно измерять, например, по линии EB .

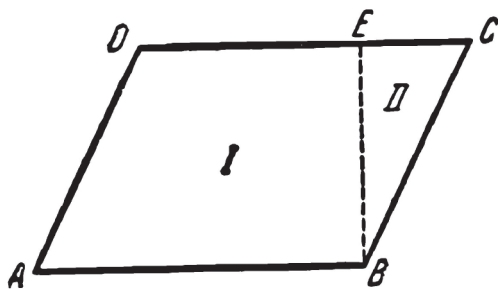


Рис. 3

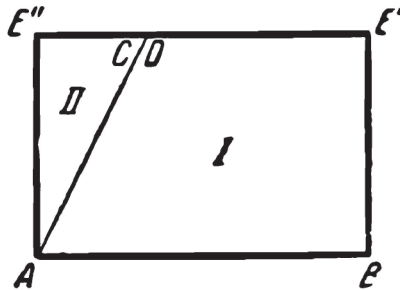


Рис. 4

Разрежем параллелограмм $ABCD$ по линии EB на две части и сложим из них прямоугольник, как это показано на рис. 4. Площадь прямоугольника $ABE'E''$ равна произведению его длины AB на ширину BE' . Но площадь прямоугольника равна площади первоначального параллелограмма, его длина AB равна основанию параллелограмма, а ширина — высоте параллелограмма. Поэтому, чтобы определить площадь параллелограмма, нужно длину его основания умножить на его высоту.

Конечно, для того, чтобы превратить параллелограмм в прямоугольник, можно было разрезать его и иначе. На рис. 5 параллелограмм разрезан по линии GH , а на рис. 6 показано, как сложить получившиеся части, чтобы образовался прямоугольник.

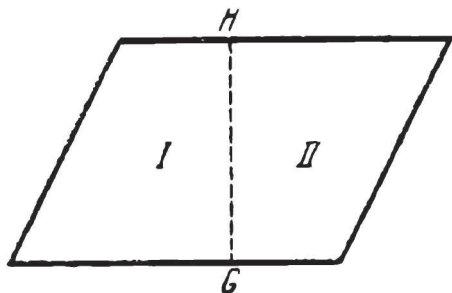


Рис. 5



Рис. 6

Поступая подобным же образом, можно треугольник превратить в прямоугольник и установить правило для вычисления площади треугольника. В самом деле, пусть требуется треугольник ABC (рис. 7) превратить в прямоугольник. Для этого на сторонах AC и CB треугольника берем точки D и E , делящие пополам эти стороны, и разрезаем треугольник ABC по линиям DF и EG ,

составляющим прямые углы с основанием треугольника (т. е. с линией AB). Треугольник распадается после этого на три части, из которых можно сложить прямоугольник, как это показано на рис. 8.

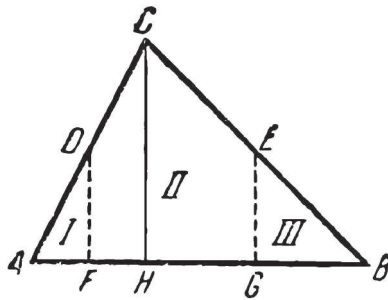


Рис. 7

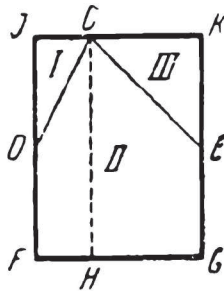


Рис. 8

Определим теперь площадь треугольника ABC (рис. 7). Очевидно, его площадь