

СОВЕТСКИЕ  УЧЕБНИКИ

АНДРЕЙ
КИСЕЛЁВ

ГЕОМЕТРИЯ

9-10 КЛАССЫ

КЛАССИКА НАУЧПОПА



МОСКВА

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	5
Предварительные замечания	7

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ	7
---------------------------------	---

I. Определение положения плоскости	7
--	---

II. Параллельные прямые и плоскости	13
---	----

Параллельные прямые	13
---------------------------	----

Прямая и плоскость, параллельные между собой	14
---	----

Параллельные плоскости	17
------------------------------	----

<i>Задачи на построение</i>	19
-----------------------------------	----

III. Перпендикуляр и наклонные к плоскости ...	24
---	----

IV. Зависимость между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей	30
---	----

<i>Задачи на построение</i>	34
-----------------------------------	----

V. Двугранные углы, угол прямой с плоскостью, угол двух скрещивающихся прямых, многогранные углы	39
---	----

Двугранные углы	39
-----------------------	----

Перпендикулярные плоскости	44
----------------------------------	----

Угол двух скрещивающихся прямых	47
---------------------------------------	----

Угол, образуемый прямой с плоскостью	47
--	----

Многогранные углы	50
-------------------------	----

<i>Упражнения</i>	58
-------------------------	----

<i>Задачи на построение</i>	60
-----------------------------------	----

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ	61
-------------------------------------	----

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.	
МНОГОГРАННИКИ	84
I. Параллелепипед и пирамида	84
Свойства граней и диагоналей параллелепипеда	92
Свойства параллельных сечений в пирамиде	95
Боковая поверхность призмы и пирамиды	99
Упражнения	102
II. Объем призмы и пирамиды	103
Объем параллелепипеда	104
Объем призмы	117
Объем пирамиды	122
III. Подобие многогранников	135
IV. Понятие о правильных многогранниках	139
V. Понятие о симметрии пространственных фигур	145
Упражнения	158
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.	
КРУГЛЫЕ ТЕЛА	162
I. Цилиндр и конус	162
Поверхность цилиндра и конуса	169
Объем цилиндра и конуса	177
Подобные цилиндры и конусы	181
II. Шар	183
Сечение шара плоскостью	183
Плоскость, касательная к шару	187
Поверхность шара и его частей	189
Объем шара и его частей	196
Упражнения	211
ДОПОЛНЕНИЕ.	
ОБ АКСИОМАХ ГЕОМЕТРИИ	214

Предисловие к первому изданию

Вторая часть учебника геометрии А. П. Киселёва — стереометрия — подверглась переработке в том же направлении, что и первая часть книги (планиметрия), а именно: в направлении приспособления к программам по геометрии средней школы, в направлении учета пожеланий компетентных органов и учреждений, высказавшихся относительно структуры и содержания современного учебника геометрии (М. П., группа математики Академии наук, Московское математическое общество, Научно-исследовательский институт средней школы), и, наконец, в направлении учета современного научного состояния вопросов, излагаемых в курсе элементарной геометрии.

Наиболее существенными моментами в переработке 2-й части являются следующие: перестановка порядка изложения вопросов о перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей в пространстве, что дало возможность значительно упростить доказательство отдельных теорем; сокращение числа теорем о параллельных прямых и плоскостях. При этом второстепенные теоремы, на которые нет ссылок в дальнейшем тексте книги и которые легко могут быть доказаны самими учащимися, перенесены в отдел упражнений; теоремы, утверждающие возможность выполнить то или иное построе-

ние, изложены в форме задач на построение (решенных в тексте). Все это позволило выделить главнейшие моменты во взаимоотношениях параллельности и перпендикулярности в пространстве и сделать этот отдел геометрии более обозримым и более легко воспринимаемым.

Введены задачи на построение в пространстве. Уточнено и несколько упрощено изложение теории измерения объемов аналогично тому, как это было сделано в первой части для измерения площадей.

Несколько сокращена глава об ортогональных проекциях фигур, и в отдельных местах изложение упрощено и детализировано.

Введены элементы симметрии в пространстве, упрощены и более детально разъяснены отдельные вопросы в статье об аксиомах геометрии за счет частичного ее сокращения.

Моими дополнениями в книге являются следующие параграфы: Задачи на построение в пространстве (§ 6, 7, 19–22, 35–37); Упражнения к главе I (стр. 58); О симметрии в пространстве (§ 99–104); Об ортогональных проекциях плоских фигур (§ 60–66); Построение правильных многогранников (§ 98); Об аксиомах геометрии (дополнение).

Н. Глаголев

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Предварительные замечания.

1. В стереометрии изучаются геометрические тела и пространственные фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Пространственные фигуры изображаются на чертеже при помощи рисунков, которые производят на глаз приблизительно такое же впечатление, как и сама фигура. Эти рисунки выполняются по определенным правилам, основанным на геометрических свойствах фигур.

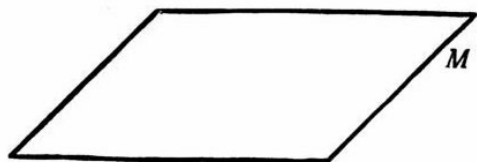
Один из способов изображения пространственных фигур на плоскости будет указан в дальнейшем (§ 54–66).

ГЛАВА ПЕРВАЯ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

2. Изображение плоскости. В обыденной жизни многие предметы, поверхность которых напоминает геометрическую плоскость, имеют форму прямоугольника: переплет книги, оконное стекло, поверхность пись-

менного стола и т. п. При этом, если смотреть на эти предметы под углом и с большого расстояния, то они представляются нам имеющими форму параллелограмма. Поэтому принято изображать плоскость на чертеже в виде параллелограмма¹. Эту плоскость обычно обозначают одной буквой, например «плоскость М» (черт. 1).



Черт. 1.

3. Основные свойства плоскости. Укажем следующие свойства плоскости, которые принимаются без доказательства, т. е. являются аксиомами.

1) *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.*

2) *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

3) *Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*

¹ Наряду с указанным изображением плоскости возможно и такое, как на чертежах 15–17 и др. (Прим. ред.)

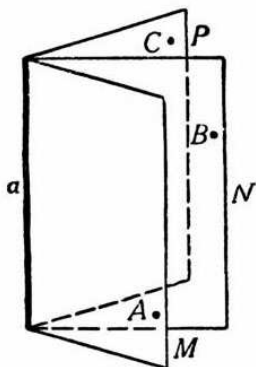
4. Следствия. Из последнего предложения можно вывести следующие следствия:

1) *Через прямую и точку вне ее можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, точка вне прямой вместе с какими-нибудь двумя точками этой прямой составляют три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

2) *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, взяв точку пересечения и еще по одной точке на каждой прямой, мы будем иметь три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

3) *Через две параллельные прямые можно провести только одну плоскость.* Действительно, параллельные прямые, по определению, лежат в одной плоскости; эта плоскость единственная, так как через одну из параллельных и какую-нибудь точку другой можно провести не более одной плоскости.

5. Вращение плоскости вокруг прямой. *Через каждую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.* В самом деле, пусть дана прямая a (черт. 2.). Возьмем какую-нибудь точку A вне ее. Через точку



Черт. 2.

А и прямую a проходит единственная плоскость (§ 4). Назовем ее плоскостью M . Возьмем новую точку B вне плоскости M . Через точку B и прямую a , в свою очередь, проходит плоскость. Назовем ее плоскостью N . Она не может совпадать с M , так как в ней лежит точка B , которая не принадлежит плоскости M . Мы можем далее взять в пространстве еще новую точку C вне плоскостей M и N . Через точку C и прямую a проходит новая плоскость. Назовем ее P . Она не совпадает ни с M , ни с N , так как в ней находится точка C , не принадлежащая ни плоскости M , ни плоскости N . Продолжая брать в пространстве все новые и новые точки, мы будем таким путем получать все новые и новые плоскости, проходящие через данную прямую a . Таких плоскостей будет **бесчисленное множество**. Все эти плоскости можно рассматривать как различные положения одной и той же плоскости, которая **вращается** вокруг прямой a .

Мы можем, следовательно, высказать еще одно свойство плоскости: плоскость может вращаться вокруг всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

6. Задачи на построение в пространстве.

Все построения, которые делались в планиметрии, выполнялись в одной плоскости при помощи чертежных инструментов. Для построений в пространстве чертежные инструменты становятся уже непригодными, так как

чертить фигуры в пространстве невозможно. Кроме того, при построениях в пространстве появляется еще новый элемент — **плоскость**, построение которой в пространстве нельзя выполнять столь простыми средствами, как построение прямой на плоскости.

Поэтому при построениях в пространстве необходимо точно определить, что значит выполнить то или иное построение, и, в частности, что значит построить плоскость в пространстве. Во всех построениях в пространстве мы будем предполагать:

1) что плоскость может быть построена, если найдены элементы, определяющие ее положение в пространстве (§ 3 и 4), т. е. что мы умеем построить плоскость, проходящую через три данные точки, через прямую и точку вне ее, через две пересекающиеся или две параллельные прямые;

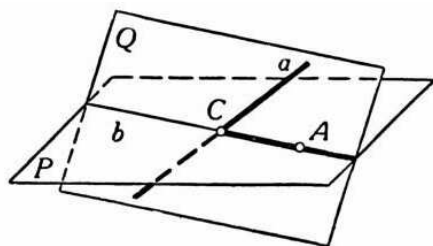
2) что если даны две пересекающиеся плоскости, то дана и линия их пересечения, т. е. что мы умеем найти линию пересечения двух плоскостей;

3) что если в пространстве дана плоскость, то мы можем выполнять в ней все построения, которые выполнялись в планиметрии.

Выполнить какое-либо построение в пространстве — это значит свести его к конечному числу только что указанных основных

построений. При помощи этих основных задач можно решать и задачи более сложные.

В этих предположениях и решаются задачи на построение в стереометрии.



Черт. 3.

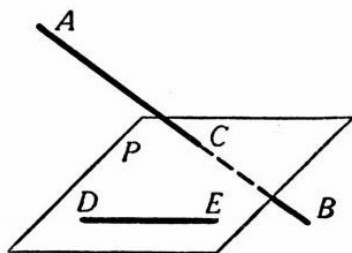
7. Пример задачи на построение в пространстве. *Задача.* Найти точку пересечения данной прямой a (черт. 3) с данной плоскостью P . Возьмем на плоскости P какую-либо точку A . Через точку A и прямую a проводим плоскость Q . Она пересекает плоскость P по некоторой прямой b . В плоскости Q находим точку C пересечения прямых a и b . Эта точка и будет искомой. Если прямые a и b окажутся параллельными, то задача не будет иметь решения.

II. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Параллельные прямые

8. Предварительное замечание. Две прямые могут быть расположены в пространстве

так, что через них нельзя провести плоскости. Возьмем, например (черт. 4), две такие прямые AB и DE , из которых одна пересекает некоторую плоскость P , а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P . Через такие две прямые нельзя провести плоскости, потому что в противном случае через прямую DE и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P , пересекающая прямую AB , и другая, содержащая ее, а это невозможно (§ 3).



Черт. 4.

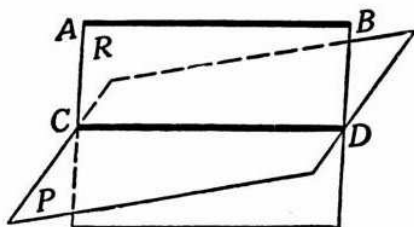
Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными, оставляя это название для таких прямых, которые, находясь в одной плоскости, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются **скрещивающимися**.

Прямая и плоскость, параллельные между собой

9. Определение. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются **параллельными**, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

10. Теорема. *Если прямая (AB , черт. 5) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.*



Черт. 5.

Проведем через AB и CD плоскость R и предположим, что прямая AB где-нибудь пересекается с плоскостью P . Тогда точка пересечения, находясь на прямой AB , должна принадлежать также и плоскости R , на которой лежит прямая AB ; в то же время точка пересечения, конечно, должна принадлежать и плоскости P . Значит, точка пересечения, находясь одновременно и на плоскости R , и на плоскости P , должна лежать на прямой CD , по которой пересекаются эти плоско-

сти; следовательно, прямая AB пересекается с прямой CD . Но это невозможно, так как по условию $AB \parallel CD$. Значит, нельзя допустить, чтобы прямая AB пересекалась с плоскостью P , и потому $AB \parallel P$.

11. Теорема. *Если плоскость (R , черт. 5) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).*

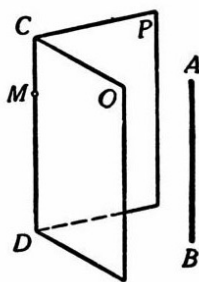
Действительно, во-первых, прямая CD лежит в одной плоскости с прямой AB , во-вторых, эта прямая не может пересечься с прямой AB , потому что в противном случае прямая AB пересекалась бы с плоскостью P , что невозможно.

12. Следствие 1. *Если прямая (AB , черт. 6) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).*

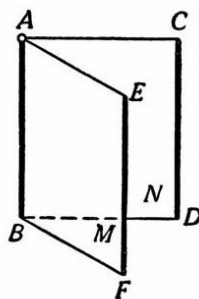
Проведем плоскость через AB и какую-нибудь точку M прямой CD . Эта плоскость должна пересечься с плоскостями P и Q по прямым, параллельным AB и проходящим через точку M . Но через точку M можно провести только одну прямую, параллельную AB ; значит, две линии пересечения проведенной плоскости с плоскостями P и Q должны слиться в одну прямую. Эта прямая, находясь одновременно на плоскости P и на плоско-

сти Q , должна совпадать с прямой CD , по которой плоскости P и Q пересекаются; значит, $CD \parallel AB$.

13. Следствие 2. Если две прямые (AB и CD , черт. 7) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.



Черт. 6.



Черт. 7.

Проведем плоскость M через параллельные прямые AB и EF . Так как $CD \parallel EF$, то $CD \parallel M$ (§ 10).

Проведем также плоскость N через CD и некоторую точку A прямой AB . Так как $EF \parallel CD$, то $EF \parallel N$. Значит, плоскость N должна пересечься с плоскостью M по прямой, параллельной EF (§ 11) и в то же время проходящей через точку A . Но в плоскости M через A проходит единственная прямая, параллельная EF , именно прямая AB . Следовательно, плоскость N пересекается с M по прямой AB ; значит, $CD \parallel AB$.