

А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

КОМПЛЕКСНАЯ ПОДГОТОВКА

К ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ
ЭКЗАМЕНУ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

АСТ
Москва
2022

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М52

Мерзляк, Аркадий Григорьевич.

М52 ЕГЭ : Математика : комплексная подготовка : к единому государственному экзамену : теория и практика / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва: Издательство АСТ, 2022. — 607, [1] с.: ил. — (Комплексная подготовка к ЕГЭ).

ISBN 978-5-17-150836-4

Справочник содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на едином государственном экзамене. Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются экзаменационные задания — контрольные измерительные материалы ЕГЭ.

Пособие состоит из двух глав: «Арифметика. Алгебра» и «Геометрия». Помимо теоретического материала в справочнике представлено значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач. Ко всем заданиям даны ответы для самопроверки.

В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте fipi.ru. Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Работа с пособием позволит повторить все основные темы курса математики за 5–11 классы и успешно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

**УДК 373:51
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-17-150836-4

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., 2022
© ООО «Издательство АСТ», 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	13
--------------------	----

ГЛАВА I

АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА

§ 1. Натуральные числа	17
1.1. Десятичная запись натуральных чисел	17
1.2. Арифметические действия над натуральными числами	18
1.3. Делимость натуральных чисел	19
1.4. Признаки делимости	20
1.5. Простые и составные числа	21
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное	23
1.7. Деление с остатком	25
<i>Примеры заданий № 1.</i>	26
§ 2. Дроби	29
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей	29
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями	32
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей	33
2.4. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби.	35
2.5. Округление чисел.	36
<i>Примеры заданий № 2.</i>	37
2.6. Проценты	41
2.7. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам	42
2.8. Отношение. Процентное отношение	43
2.9. Пропорции	45
<i>Примеры заданий № 3.</i>	46
§ 3. Числовые множества	48
3.1. Понятие о множестве	48
3.2. Числовые множества	50

3.3. Координатная прямая	53
3.4. Модуль действительного числа	54
<i>Примеры заданий № 4</i>	55
§ 4. Целые выражения	58
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения	58
4.2. Степень с натуральным показателем и её свойства . . .	59
4.3. Одночлен	61
4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной	62
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов	64
4.6. Формулы сокращённого умножения.	65
4.7. Разложение многочленов на множители	67
<i>Примеры заданий № 5</i>	69
§ 5. Дробные выражения	72
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби	72
5.2. Тождество. Тождественные преобразования выражений	73
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей	73
5.4. Действия с алгебраическими дробями	75
<i>Примеры заданий № 6</i>	78
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями	81
5.6. Стандартный вид числа	83
<i>Примеры заданий № 7</i>	83
§ 6. Корень n-й степени. Степень с действительным показателем.	85
6.1. Корень n -й степени и его свойства	85
6.2. Преобразование выражений, содержащих корни	87
<i>Примеры заданий № 8</i>	89
6.3. Степень с рациональным показателем	94
6.4. Преобразование выражений, содержащих степень с рациональным показателем	95
6.5. Степень с действительным показателем	97
<i>Примеры заданий № 9</i>	99

§ 7. Формулы тригонометрии.	
Преобразование тригонометрических выражений	103
7.1. Радианная мера угла. Угол поворота	103
7.2. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла поворота . .	105
7.3. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса	108
7.4. Основные тригонометрические тождества	109
7.5. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.	110
7.6. Формулы приведения	111
7.7. Формулы двойного угла. Формулы понижения степени	114
7.8. Формулы половинного угла. Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла.	116
7.9. Сумма и разность синусов (косинусов)	117
7.10. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму	119
7.11. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс	119
<i>Примеры заданий № 10.</i>	122
§ 8. Логарифмы	127
8.1. Логарифм числа	127
8.2. Свойства логарифмов.	128
<i>Примеры заданий № 11.</i>	129
§ 9. Функции	131
9.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции.	131
9.2. Способы задания функции	132
9.3. График функции. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы	134
9.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции	138
9.5. Чётные и нечётные функции.	140
9.6. Периодические функции	141
9.7. Точки максимума и точки минимума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Ограниченные функции	142
9.8. Обратная функция	145
9.9. Преобразования графиков функций	146

9.10. Линейная функция	151
9.11. Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$	152
9.12. Квадратичная функция	154
<i>Примеры заданий № 12</i>	158
9.13. Степенная функция с натуральным показателем ($y = x^n$, $n \in N$)	169
9.14. Функция $y = \sqrt[n]{x}$	170
9.15. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$	171
9.16. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$	173
9.17. Показательная функция ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$).	175
9.18. Логарифмическая функция ($y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$).	176
<i>Примеры заданий № 13</i>	177
§ 10. Уравнения с одной переменной	182
10.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной	182
10.2. Линейное уравнение с одной переменной.	184
10.3. Квадратное уравнение	185
10.4. Теорема Виета.	187
10.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители	189
10.6. Рациональные уравнения	190
<i>Примеры заданий № 14</i>	192
10.7. Метод замены переменной.	194
10.8. Уравнения, содержащие знак модуля	196
10.9. Иррациональные уравнения	198
<i>Примеры заданий № 15</i>	201
10.10. Простейшие тригонометрические уравнения.	203
10.11. Основные методы решения тригонометрических уравнений	206
<i>Примеры заданий № 16</i>	210
10.12. Показательные уравнения	215
10.13. Логарифмические уравнения.	217
<i>Примеры заданий № 17</i>	219
10.14. Уравнения с параметрами	222
<i>Примеры заданий № 18</i>	227

§ 11. Уравнения с двумя переменными и их системы	231
11.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения	231
11.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом	233
11.3. Методы решений системы двух уравнений с двумя переменными	237
<i>Примеры заданий № 19.</i>	242
§ 12. Применение математических методов для решения прикладных задач	246
12.1. Решение прикладных задач с помощью уравнений	246
<i>Примеры заданий № 20.</i>	248
12.2. Решение прикладных задач с помощью систем уравнений	252
<i>Примеры заданий № 21.</i>	254
12.3. Решение прикладных задач арифметическим способом	256
<i>Примеры заданий № 22.</i>	257
§ 13. Неравенства	260
13.1. Общие сведения о неравенствах с одной переменной	260
13.2. Числовые промежутки	261
13.3. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств	262
13.4. Квадратные неравенства	265
13.5. Метод интервалов	267
<i>Примеры заданий № 23.</i>	270
13.6. Показательные неравенства	275
13.7. Логарифмические неравенства	277
13.8. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств	279
13.9. Неравенство с двумя переменными и его график	284
13.10. Система неравенств с двумя переменными.	286
<i>Примеры заданий № 24.</i>	287

§ 14. Числовые последовательности	291
14.1. Понятие последовательности	291
14.2. Способы задания последовательности	292
14.3. Арифметическая прогрессия	294
14.4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии	295
14.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов	296
14.6. Сумма n первых членов геометрической прогрессии	299
14.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы	300
<i>Примеры заданий № 25</i>	300
§ 15. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики	303
15.1. Комбинаторные правила суммы и произведения	303
15.2. Перестановки, размещения, сочетания	305
15.3. Бином Ньютона	307
15.4. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	308
<i>Примеры заданий № 26</i>	310
15.5. Статистика. Статистические характеристики	317
15.5. Частота и вероятность случайного события	319
15.7. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности	320
15.8. Вычисление вероятностей с помощью правил комбинаторики	322
<i>Примеры заданий № 27</i>	325
§ 16. Производная и её применение	329
16.1. Понятие производной	329
16.2. Геометрический и физический смысл производной	332
16.3. Правила вычисления производных. Производные основных элементарных функций	333
16.4. Уравнение касательной	337
<i>Примеры заданий № 28</i>	339
16.5. Признаки возрастания и убывания функции	342

16.6. Точки экстремума функции	343
16.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	346
16.8. Вторая производная и её физический смысл	349
16.9. Исследование свойств функции и построение её графика	349
<i>Примеры заданий № 29.</i>	351
§ 17. Первообразная и интеграл.	355
17.1. Понятие первообразной. Неопределённый интеграл	355
17.2. Правила нахождения первообразной	357
17.3. Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл	360
<i>Примеры заданий № 30.</i>	363

ГЛАВА II

ГЕОМЕТРИЯ

§ 18. Треугольник.	371
18.1. Виды треугольников	371
18.2. Признаки равенства треугольников	372
18.3. Свойства равнобедренного треугольника	373
18.4. Признаки равнобедренного треугольника	374
18.5. Сумма углов треугольника. Свойства внешнего угла треугольника	376
18.6. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника	377
18.7. Терема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках	379
18.8. Свойства высот, медиан и биссектрис треугольника	381
18.9. Средняя линия треугольника	382
18.10. Подобные треугольники	383
18.11. Признаки подобия треугольников	384
<i>Примеры заданий № 31.</i>	387
18.12. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике	390

18.13. Теорема Пифагора	391
18.14. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника.	392
18.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°	395
18.16. Теорема косинусов	397
18.17. Теорема синусов	398
<i>Примеры заданий № 32</i>	399
§ 19. Окружность	402
19.1. Свойства элементов окружности	402
19.2. Касательная и секущая к окружности	403
19.3. Окружность, описанная около треугольника.	404
19.4. Окружность, вписанная в треугольник	406
19.5. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности	408
19.6. Длина окружности. Площадь круга и площадь сектора	409
<i>Примеры заданий № 33</i>	411
§ 20. Многоугольник	416
20.1. Параллелограмм и его свойства	416
20.2. Признаки параллелограмма	418
20.3. Прямоугольник, ромб, квадрат	420
<i>Примеры заданий № 34</i>	421
20.4. Трапеция. Средняя линия трапеции.	424
20.5. Четырёхугольник, вписанный в окружность.	426
20.6. Четырёхугольник, описанный около окружности	427
20.7. Сумма углов выпуклого многоугольника.	428
20.8. Правильные многоугольники	428
<i>Примеры заданий № 35</i>	431
§ 21. Площадь многоугольника	435
21.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника	435
21.2. Площадь параллелограмма. Площадь трапеции	436
21.3. Формулы для нахождения площади треугольника	437
21.4. Площади подобных многоугольников	439
<i>Примеры заданий № 36</i>	440

§ 22. Параллельность в пространстве	445
22.1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве	445
22.2. Параллельность прямой и плоскости	447
22.3. Параллельность плоскостей	448
<i>Примеры заданий № 37.</i>	449
§ 23. Перпендикулярность в пространстве	453
23.1. Угол между прямыми в пространстве	453
23.2. Перпендикулярность прямой и плоскости	455
23.3. Расстояния в пространстве	457
23.4. Теорема о трёх перпендикулярах	459
23.5. Угол между прямой и плоскостью	461
23.6. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями	462
23.7. Перпендикулярные плоскости	464
<i>Примеры заданий № 38.</i>	466
§ 24. Многогранники	470
24.1. Призма	470
24.2. Параллелепипед	472
<i>Примеры заданий № 39.</i>	475
24.3. Пирамида	478
24.4. Усечённая пирамида	481
24.5. Правильные многогранники	482
<i>Примеры заданий № 40.</i>	484
§ 25. Круглые тела	487
25.1. Цилиндр. Комбинации цилиндра с призмой	487
25.2. Конус. Усечённый конус	490
25.3. Комбинации конуса и усечённого конуса с пирамидой	493
<i>Примеры заданий № 41.</i>	495
25.4. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости	498
25.5. Многогранники, вписанные в сферу	500
25.6. Многогранники, описанные около сферы	502
<i>Примеры заданий № 42.</i>	503
§ 26. Объёмы тел. Площадь сферы	505
26.1. Объём тела. Формулы для вычисления объёмов многогранников	505
<i>Примеры заданий № 43.</i>	507

26.2. Объёмы тел вращения	510
26.3. Площадь сферы	511
<i>Примеры заданий № 44</i>	511
§ 27. Координаты и векторы в пространстве	515
27.1. Декартовы координаты точки в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка	515
27.2. Уравнение фигуры. Уравнение сферы	516
27.3. Векторы в пространстве. Координаты вектора	518
27.4. Сложение и вычитание векторов	521
27.5. Умножение вектора на число	524
27.6. Компланарные векторы. Разложение вектора по трём некопланарным векторам	527
27.7. Скалярное произведение векторов	528
27.8. Уравнение плоскости	529
<i>Примеры заданий № 45</i>	531
Ответы к примерам заданий	535
Демонстрационные варианты контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2022 года по математике	560
Профильный уровень	561
Базовый уровень	592

ВВЕДЕНИЕ

На единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике выносятся темы, рассматриваемые в курсах математики 5–6 классов, алгебры 7–9 классов, алгебры и начал анализа 10–11 классов, планиметрии 7–9 классов, стереометрии 10–11 классов. Основой подготовки к ЕГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–11 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Неудобства такого подхода очевидны: во-первых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; во-вторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобнее использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках. Она представляет собой справочник для подготовки к ЕГЭ по математике.

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ЕГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач. В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте fir1.ru. Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Данный справочник выполняет также и свою традиционную роль — позволяет быстро найти нужную информацию: какими свойствами обладает степень с целым показателем, чему равна сумма n первых членов геометрической прогрессии, как найти дробь от числа, по какой формуле можно вычислить площадь трапеции и т.п.

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию кур-

сов математики 5–6 классов, алгебры 7–9 классов, алгебры и начал анализа 10–11 классов; вторая глава «Геометрия» — содержанию курса планиметрии 7–9 классов и стереометрии 10–11 классов. Каждая из глав разбита на параграфы. Их содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ЕГЭ по математике.

Понятно, что для успешного написания ЕГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в справочник включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ЕГЭ по математике.

Большинство проверочных работ состоят из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

Желаем вам успешной сдачи единого государственного экзамена по математике.

ГЛАВА I

**АРИФМЕТИКА.
АЛГЕБРА**