

УДК 373.5:51  
ББК 22.1я721  
К60

Макет подготовлен при содействии ООО «Айдиономикс».

**Колесникова, Татьяна Александровна.**

К60 Математика / Т. А. Колесникова. — Москва : Эксмо, 2022. — 224 с. — (Домашний репетитор с наглядными видеоуроками).

ISBN 978-5-04-117164-3

В издании представлены сведения по основным темам школьного курса математики. Теоретическая информация, изложенная в доступной для понимания форме, сопровождается примерами, схемами и таблицами, что позволит лучше усвоить учебный материал и структурировать знания по предмету.

Отличительной особенностью издания является набор обучающих анимационных видео, цель которых — облегчить понимание наиболее сложных тем. В видеоуроках, доступных по ссылкам, наглядно проиллюстрирована теория, даны понятные объяснения, приведены примеры решения задач.

Книга адресована учащимся средних и старших классов, учителям, а также всем, кто интересуется математикой.

УДК 373.5:51  
ББК 22.1я721

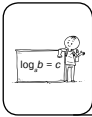
ISBN 978-5-04-117164-3

© Колесникова Т.А., 2022  
© ООО «Айдиономикс», 2022  
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2022

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5	Числовые последовательности.	
Алгебра и начала анализа.....	6	Прогрессии.....	83
Числовые множества.....	6	Числовые последовательности.....	83
Натуральные числа.....	7	Прогрессии.....	84
Дроби.....	10	Начала математического анализа... ..	86
Целые и рациональные числа.....	20	Производная.....	86
Иррациональные и действительные		Первообразная и интеграл.....	104
числа.....	23	Элементы теории множеств.....	116
Вычисление и преобразование		Основные понятия.....	116
выражений.....	26	Отношения на множествах.....	117
Тождественные преобразования.....	26	Элементы математической	
Многочлены.....	27	логики.....	121
Алгебраические дроби.....	30	Высказывания.....	121
Иррациональные выражения.....	31	Предложения с переменными.....	123
Логарифмические выражения.....	32	Геометрия.....	124
Тригонометрические выражения.....	34	Планиметрия.....	124
Уравнения.....	37	Начальные геометрические	
Линейные уравнения.....	38	сведения.....	124
Квадратные уравнения.....	38	Треугольники.....	128
Рациональные уравнения.....	40	Четырёхугольники.....	139
Иррациональные уравнения.....	42	Многоугольники.....	144
Показательные уравнения.....	43	Окружность и круг.....	145
Логарифмические уравнения.....	44	Площади фигур.....	153
Тригонометрические уравнения.....	46	Правильные многоугольники.....	156
Неравенства.....	49	Векторы.....	157
Числовые неравенства и их		Метод координат.....	161
свойства.....	49	Стереометрия.....	164
Числовые промежутки.....	50	Введение в стереометрию.....	164
Неравенства с одной переменной... ..	51	Взаимное расположение прямых	
Линейные неравенства.....	52	и плоскостей в пространстве.....	165
Метод интервалов.....	53	Многогранники.....	173
Квадратные неравенства.....	54	Тела и поверхности вращения.....	180
Рациональные неравенства.....	56	Векторы в пространстве.....	187
Иррациональные неравенства.....	57	Метод координат в пространстве... ..	189
Показательные неравенства.....	58	Подобные тела.....	194
Логарифмические неравенства.....	59	Элементы комбинаторики,	
Простейшие тригонометрические		теории вероятностей	
неравенства.....	61	и статистики.....	195
Системы уравнений и неравенств... ..	63	Элементы комбинаторики.....	195
Системы уравнений с двумя		Правила выбора элементов.	
неизвестными.....	63	Перестановки, размещения	
Системы неравенств с одной		и сочетания.....	195
неизвестной.....	65	Элементы теории вероятностей... ..	198
Функции.....	67	Случайные события и действия	
Понятие функции. Способы задания		над ними.....	198
функции.....	67	Элементы статистики.....	205
Преобразование графиков функций... ..	68	Категории и характеристики	
Обратная функция.....	69	случайных величин.....	205
Свойства функции.....	70	Приложение 1.....	211
Основные элементарные функции.....	73	Приложение 2.....	223

## QR-коды



Логарифм числа

33



Применение производной к исследованию функций

92



Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса

34



Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника

138



Радийанная мера угла

35



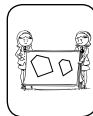
Обобщение по теме «Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат»

142



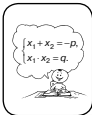
Формулы приведения

36



Площади подобных фигур

156



Теорема Виета

39



Угол между плоскостями

171



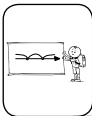
Логарифмические уравнения

44



Объём наклонной призмы

174



Применение метода интервалов

55



Построение точки по её координатам

189



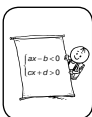
Логарифмические неравенства

59



Косинус угла между векторами

192



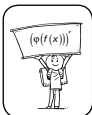
Системы линейных неравенств

65



Число сочетаний

197



Производная сложной функции

90



Формула полной вероятности

204

## ВВЕДЕНИЕ

Перед вами необычный справочник, который поможет систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы. Главное отличие данного пособия от множества других — обучающие анимационные видео, которые наглядно помогут разобраться со сложными темами. В обучении важен принцип наглядности. Когда работают все каналы восприятия, ученик быстрее и легче усваивает сложный материал. Информация, представленная в словесном и образном виде, задействует одновременно оба полушария головного мозга. В таком случае её проще обработать и запомнить.

В данной книге 20 QR-кодов. Для их активации следует привести камеру устройства (смартфона, планшета и др.) на QR-код. На экране появится обучающее видео, в котором содержится развёрнутый поясняющий материал с элементами анимации по одной из тем, актуальных для сдачи экзамена по математике.



Полный перечень ссылок для скачивания и просмотра обучающих видеороликов представлен в приложении 2.

Теоретические блоки информации в пособии чередуются с тематическими рисунками, схемами и таблицами, что помогает систематизировать и закрепить изученный материал.

В книге рассмотрены традиционные разделы математики: «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей», которые соответствуют объёму учебного материала, включённого в единый государственный экзамен по математике.

Справочник предназначен для школьников, студентов и учителей школ, а также для всех, кто интересуется математикой.

Пособие поможет учащимся и выпускникам при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к сдаче основного и единого государственных экзаменов.

Желаем успехов!

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

## Числовые множества



**Числовыми** называются множества, элементами которых являются числа.

Множество **натуральных чисел** образуют числа, которые используются при счёте предметов.

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; \dots\}$$

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (-1; -2; -3; -4; -5...), и число ноль образуют множество **целых чисел**.

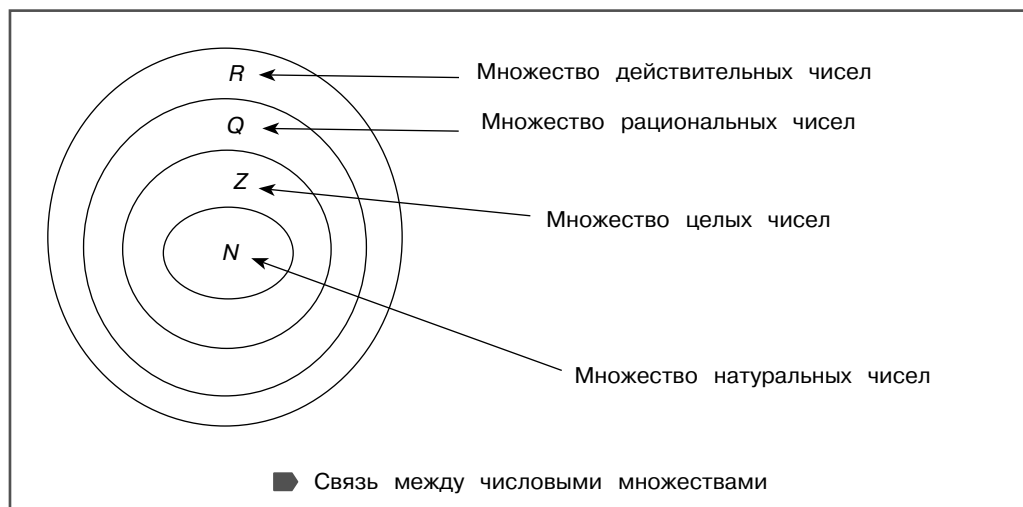
$$Z = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Множество **рациональных чисел** составляют числа, которые можно представить в виде дроби  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z$ ,  $n \in N$  (конечные или бесконечные периодические десятичные дроби). Обозначение:  $Q$ .

Множество **иррациональных чисел** составляют числа, которые не могут быть представлены в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z$ ,  $n \in N$  (бесконечные десятичные непериодические дроби). Обозначение:  $I$ .

Рациональные и иррациональные числа составляют множество **действительных чисел**. Обозначение:  $R$ .

$$R = Q \cup I$$



## Натуральные числа

Множество натуральных чисел является бесконечным, так как для любого натурального числа  $n$  найдётся натуральное число, большее, чем  $n$ .

### ДЕЙСТВИЯ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

#### Сложение

$$a + b = c$$

↑      ↑      ↙  
слагаемые      сумма

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = a$$

#### Вычитание (действие, обратное сложению)

$$a - b = c$$

↑      ↑      ↙  
уменьшаемое      вычитаемое      разность

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$$

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

$$a - 0 = a$$

$$a - a = 0$$

#### Умножение

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b$$

$b$  слагаемых

$$a \cdot b = c$$

↑      ↑      ↙  
множители      произведение

Вариант обозначения:  $a \times b$ .

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$



#### Деление (действие, обратное умножению)

$$a : b = c$$

↑      ↑      ↙  
делимое      делитель      частное

$$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$$

$$a : (b : c) = (a : b) \cdot c$$

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

$$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$$

$$a : a = 1$$

$$a : 1 = a$$

$$0 : a = 0 \quad (a \neq 0)$$

Варианты обозначений:  $\frac{a}{b}$  или  $a/b$ .

★ Если частное  $c$  является натуральным числом, то говорят, что  $a$  делится (без остатка) на  $b$ .

★ Если частное  $c$  не является натуральным числом, то говорят, что  $a$  не делится (без остатка) на  $b$ .

Разделить с остатком число  $a$  на число  $b$  — значит найти два таких числа  $q$  и  $r$ , что  $a = b \cdot q + r$  и  $r < b$ .

**ВАЖНО!** Остаток должен быть меньше делителя.

✓ Деление с остатком:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \rightarrow 70 \\
 \underline{-6} \\
 10 \\
 \underline{-9} \\
 1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 3 \\
 23
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

делитель ←  
 делимое →  
 остаток →  
 неполное частное

Проверка:  $70 = 3 \cdot 23 + 1$ .



## Возведение в степень с натуральным показателем

Выражение  $a^n$  называется **степенью** числа  $a$ .

Вторая степень числа называется **квадратом** числа, третья степень — **кубом** числа.

показатель степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

$n$  множителей

основание степени

### Свойства степеней

$$a^1 = a$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ где } a \neq 0$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ где } b \neq 0$$



Сложение и вычитание, умножение и деление, а также возведение в степень и извлечение корня попарно представляют собой обратные действия.



Свойства сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень представляют собой равенства, которые можно использовать не только слева направо, но и справа налево.



Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**.

Только в результате сложения и умножения натуральных чисел также получаются натуральные числа.

### Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1</b>	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
<b>2</b>	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
<b>3</b>	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
<b>4</b>	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
<b>5</b>	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
<b>6</b>	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
<b>7</b>	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
<b>8</b>	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
<b>9</b>	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

### Таблица степеней

$a^n$	Значения $n$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>2<math>n</math></b>	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
<b>3<math>n</math></b>	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
<b>4<math>n</math></b>	4	16	64	256	1024	4096				
<b>5<math>n</math></b>	5	25	125	625	3125	15 625				
<b>6<math>n</math></b>	6	36	216	1296	7776	46 656				
<b>7<math>n</math></b>	7	49	343	2401	16 807					
<b>8<math>n</math></b>	8	64	512	4096	32 768					
<b>9<math>n</math></b>	9	81	729	6561	59 049					

## ▶ ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ

★ Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.

★ Действия 2-й ступени: умножение и деление.

★ Действия 3-й ступени: возведение в степень.

**В выражении без скобок** сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо.

Возведение в степень



умножение/деление



сложение/вычитание

✓ Запись решения в строку:

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{4} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{3} & \\ 17 - 5 \cdot 6 : 3 - 2 + 4 : 2 & = & 17 - 30 : 3 - 2 + 2 = & 17 - 10 - \\ & & - 2 + 2 = & 7 - 2 + 2 = & 7 \end{array}$$

**В выражении со скобками** сначала выполняют все действия в скобках, а затем действия большей ступени.

Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий.

Действия в скобках



возведение в степень



умножение/деление

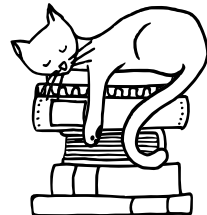


сложение/вычитание

✓ Запись решения по действиям:

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{5} & \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{6} & \\ (3+1) \cdot 2 + 6^2 : 3 - 7 & = & 13 \end{array}$$

- 1)  $3+1=4$ ;
- 2)  $6^2=36$ ;
- 3)  $4 \cdot 2=8$ ;
- 4)  $36:3=12$ ;
- 5)  $8+12=20$ ;
- 6)  $20-7=13$ .



## 📍 Дроби

**Дробь** — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

### ▶ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Число вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , называют

**обыкновенной дробью.**

$\frac{m}{n}$  ← числитель  
 $\frac{m}{n}$  ← знаменатель

**Правильная дробь** — это обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, то есть  $m < n$ .

Любая правильная дробь меньше единицы:  $\frac{m}{n} < 1$ , если  $m < n$ .

✓ Правильные дроби:  $\frac{3}{8}$  ( $3 < 8$ );  $\frac{1}{5}$  ( $1 < 5$ ).

**Неправильная дробь** — это обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, то есть  $m \geq n$ .

Любая неправильная дробь больше еди-

ницы или равна ей:  $\frac{m}{n} \geq 1$ , если  $m \geq n$ .

✓ Неправильные дроби:  $\frac{8}{3}$  ( $8 > 3$ );  $\frac{5}{5}$  ( $5 = 5$ ).

✓ Представление натурального числа в виде неправильной дроби:  $4 = \frac{4}{1}$  или

$$4 = \frac{8}{2}.$$



Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби.

## ► ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad c \neq 0$$

**ВАЖНО!** При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным.

**Сокращение дроби** — действие перехода к новой дроби, равной заданной, но с меньшими числителем и знаменателем.

✓  $\frac{18}{26} = \frac{9}{13}$  (числитель и знаменатель дроби разделили на 2).

Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель на их общий делитель, больший 1.

**Несократимой** называется дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа.

Сокращать дробь можно сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя либо несколько раз на общий делитель.

✓ Сократим дробь  $\frac{140}{175}$ .

$$\triangleright 140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7; \quad 175 = 5 \cdot 5 \cdot 7; \quad \text{НОД}(140; 175) = 5 \cdot 7 = 35. \quad \text{Тогда} \quad \frac{140}{175} = \frac{140 : 35}{175 : 35} = \frac{4}{5}.$$

$$\triangleright \frac{140}{175} = \frac{140 : 5}{175 : 5} = \frac{28 : 7}{35 : 7} = \frac{4}{5}.$$

**Приведение дроби к новому знаменателю** — действие замены заданной дроби равной ей дробью, но с большими числителем и знаменателем.

Приведение к новому знаменателю используется при сложении, вычитании, сравнении обыкновенных дробей, а также при представлении обыкновенной дроби в виде десятичной.

$$\checkmark \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \text{ (числитель и знаменатель дроби умножили на 25).}$$

### ► СМЕШАННЫЕ ЧИСЛА

Число, содержащее целую и дробную части, называется **смешанным**.

#### Представление неправильной дроби в виде смешанного числа

- 1) Разделить числитель на знаменатель с остатком.
- 2) Неполное частное — это целая часть, остаток от деления — числитель, знаменатель остаётся прежним.


$$\checkmark \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}, \text{ так как } 17:7=2 \text{ (ост. 3).}$$



#### Представление смешанного числа в виде неправильной дроби

- 1) Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель — получим числитель неправильной дроби.
- 2) Знаменатель остаётся прежним.

$$\checkmark 3\frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 11 + 5}{11} = \frac{38}{11}.$$



**Смешанное число** — это сумма натурального числа и обыкновенной дроби, записанная без знака «+».

$$\checkmark 8\frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3}.$$

### ► СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ И СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

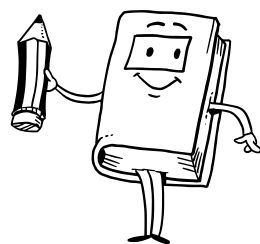
#### Сравнение обыкновенных дробей

- 1) Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой числитель больше.

$$\checkmark \frac{5}{12} > \frac{3}{12}, \text{ так как } 5 > 3.$$

- 2) Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше.

$$\checkmark \frac{5}{9} > \frac{5}{11}, \text{ так как } 9 < 11.$$



#### Сравнение смешанных чисел

- 1) Из двух смешанных чисел с разными целыми частями больше то число, у которого целая часть больше.

$$\checkmark 7\frac{3}{8} > 6\frac{9}{13}, \text{ так как } 7 > 6.$$

2) Если целые части смешанных чисел равны, надо сравнить их дробные части по правилам сравнения обыкновенных дробей.

$$\checkmark 2\frac{3}{20} > 2\frac{1}{20}, \text{ так как } \frac{3}{20} > \frac{1}{20}.$$



Если у дробей разные знаменатели (числители), необходимо сначала с помощью основного свойства дроби привести их к одному знаменателю (числителю).

## ► АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ И СМЕШАННЫМИ ЧИСЛАМИ

### Сложение

Чтобы **сложить обыкновенные дроби**, надо:

- 1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные;
- 2) сложить числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним:

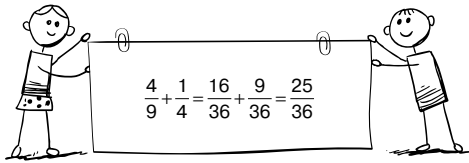
$$\text{ним: } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить; если дробь неправильная, нужно представить её в виде смешанного числа.

$$\checkmark \frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9}{30} + \frac{14}{30} = \frac{23}{30}.$$

$$\checkmark \frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{4}{14} + \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

$$\checkmark \frac{11}{15} + \frac{3}{10} = \frac{22}{30} + \frac{9}{30} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}.$$



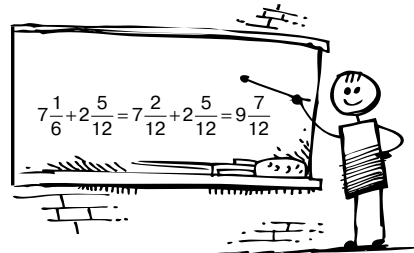
Чтобы **сложить смешанные числа**, надо:

- 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
- 2) отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно — дробных.

Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, нужно выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

$$\checkmark 2\frac{3}{8} + 5\frac{5}{12} = 2\frac{9}{24} + 5\frac{10}{24} = 7\frac{19}{24}.$$

$$\checkmark 2\frac{7^2}{9} + 3\frac{5^3}{6} = 2\frac{14}{18} + 3\frac{15}{18} = 5\frac{29}{18} = 6\frac{11}{18}.$$



### Вычитание

Чтобы **вычесть обыкновенные дроби**, надо:

- 1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные;
- 2) вычесть числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним:

$$\text{ним: } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить.

$$\checkmark \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}.$$

$$\checkmark \frac{5}{7} - \frac{3}{14} = \frac{10}{14} - \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Чтобы **вычесть смешанные числа**, надо:

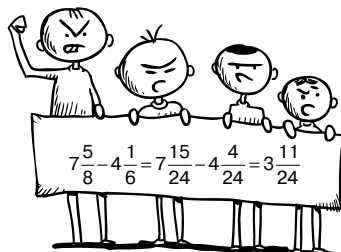
- 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
- 2) отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно — дробных.

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, нужно превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

$$\checkmark 3\frac{11}{12} - 2\frac{5}{6} = 3\frac{11}{12} - 2\frac{10}{12} = 1\frac{1}{12}.$$

$$\checkmark 9\frac{2}{7} - 3\frac{5}{7} = 8\frac{7+2}{7} - 3\frac{5}{7} = 8\frac{9}{7} - 3\frac{5}{7} = 5\frac{4}{7}.$$

$$\checkmark 9\frac{7}{15} - 2\frac{5}{6} = 9\frac{14}{30} - 2\frac{25}{30} = 8\frac{44}{30} - 2\frac{25}{30} = 6\frac{19}{30}.$$



## Умножение

Чтобы **умножить обыкновенные дроби**, надо:

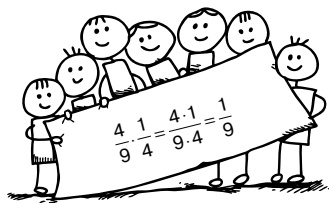
- 1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей (произвести сокращение, если возможно):  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ;
- 2) первое произведение записать числителем, второе — знаменателем.

Если получилась неправильная дробь, нужно представить её в виде смешанного числа.

$$\checkmark \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

$$\checkmark \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

$$\checkmark \frac{4}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{4 \cdot 35}{5 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$



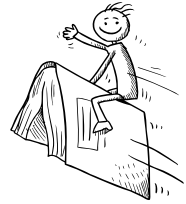
Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:

- 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
- 2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
- 3) первое произведение записать числителем, второе — знаменателем.

$$\checkmark 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{7 \cdot 30}{3 \cdot 7} = 10.$$

$$\checkmark 5\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{20} = \frac{16 \cdot 81}{3 \cdot 20} = \frac{4 \cdot 27}{1 \cdot 5} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}.$$

$$\checkmark 1\frac{2}{5} \cdot 4\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 32}{5 \cdot 7} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}.$$



## Деление

Чтобы **разделить одну обыкновенную дробь на другую**, надо делимое умножить на число, обратное делителю:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ .

$$\checkmark \frac{8}{35} : \frac{4}{5} = \frac{8}{35} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{7} \quad \checkmark \frac{4}{7} : \frac{8}{21} = \frac{4 \cdot 21}{7 \cdot 8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:

- 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
- 2) делимое умножить на число, обратное делителю.

$$\checkmark 7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{15}{2} : \frac{5}{2} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 3.$$

$$\checkmark 2\frac{3}{5} : 1\frac{6}{7} = \frac{13}{5} : \frac{13}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}.$$



Чтобы выполнить умножение (деление) на натуральное число, это число можно представить в виде неправильной дроби со знаменателем 1:  $n = \frac{n}{1}$ .

$$\text{теlem } 1: n = \frac{n}{1}.$$

$$\checkmark \frac{3}{7} \cdot 14 = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{1} = \frac{3 \cdot 14}{7 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6.$$

$$\checkmark 2 : 1\frac{3}{5} = 2 : \frac{8}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25.$$

## ▶ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.

$$a, bcde \dots = a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \frac{e}{10000} + \dots$$

целая часть      дробная часть

## Приведение десятичной дроби к обыкновенной

- 1) В числителе записать число, стоящее после запятой.
- 2) В знаменателе записать разрядную единицу (10, 100, 1000 и т. д.), которая содержит столько же нулей, сколько знаков после запятой в десятичной дроби.

$$\checkmark 0,3 = \frac{3}{10} \quad \checkmark 0,019 = \frac{19}{1000}.$$

Если десятичная дробь содержит целую часть, то дробь переводят в смешанное число, в котором целую часть записывают перед дробной.

При необходимости получившуюся обыкновенную дробь надо сократить.

$$\checkmark 17,11 = 17 \frac{11}{100}$$

$$\checkmark 8,2 = 8 \frac{2}{10} = 8 \frac{1}{5}$$

## Приведение обыкновенной дроби к десятичной

### ★ Способ 1.

Домножить числитель и знаменатель дроби так, чтобы в знаменателе получилась разрядная единица.

В случае смешанного числа домножают только дробную часть, а целая часть не меняется.

$$\checkmark \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

$$\checkmark 9 \frac{2}{125} = 9 \frac{2 \cdot 8}{125 \cdot 8} = 9 \frac{16}{1000} = 9,016.$$

$$\checkmark \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

### ★ Способ 2.

Разделить числитель на знаменатель «уголком».

$$\checkmark \begin{array}{r} 1,0 \quad 5 \\ 0 \quad | \quad 0,2 \\ - 10 \\ \hline - 10 \\ \hline 0 \end{array}$$



Не каждую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби. **Несократимую обыкновенную дробь** можно перевести в конечную десятичную дробь, если в разложении её знаменателя на простые множители есть только 2 и (или) 5.

## ▶ СРАВНЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

### ★ Способ 1.

Чтобы сравнить две десятичные дроби, надо сначала уравнивать в них число десятичных знаков, приписав к одной из них справа нули, а затем, отбросив запятую, сравнить получившиеся натуральные числа.

✓ Сравним 12,16 и 12,051.

$$12,16 = 12,160; 12\,160 > 12\,051.$$

Тогда  $12,16 > 12,051$ .

### ★ Способ 2.

Десятичные дроби сравнивают по разрядно, начиная слева направо.

Целая часть сравнивается с целой, десятые — с десятыми, сотые — с сотыми и т. д.

✓  $1,78 < 4,1$  ( $1 < 4$ ).



★ Если дробная часть десятичной дроби оканчивается нулями, то их можно не писать — значение дроби не изменится.

★ Если к дробной части приписать любое число нулей, то значение десятичной дроби не изменится.

$$\checkmark 36,74 > 36,29 \quad (7 > 2).$$

$$\checkmark 0,416 < 0,4163 \quad (0,416 = 0,4160 \text{ и } 0 < 3).$$

Чтобы сравнить десятичную дробь с обыкновенной, надо обыкновенную дробь представить в виде десятичной, а затем выполнить сравнение. Можно также преобразовать десятичную дробь в обыкновенную и далее уже сравнивать две обыкновенные дроби.

### ► АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:

- 1) уравнивать в этих дробях количество знаков после запятой;
- 2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
- 3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
- 4) поставить в ответе запятую под запятой.

$$\checkmark 2,35 + 11,7 = 14,05$$

$$\begin{array}{r} 11,70 \\ + 2,35 \\ \hline 14,05 \end{array}$$

$$\checkmark 12 - 10,346 = 1,654$$

$$\begin{array}{r} 12,000 \\ - 10,346 \\ \hline 1,654 \end{array}$$

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:

- 1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
- 2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

$$\checkmark 3,25 \cdot 2,8 = 9,100 = 9,1$$

$$\begin{array}{r} \times 3,25 \\ 2,8 \\ \hline + 2600 \\ 650 \\ \hline 9,100 \end{array}$$



Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:

- 1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
- 2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

$$\checkmark 70,15 : 23 = 3,05$$

$$\begin{array}{r} \underline{70,15} \overline{) 23} \\ 69 \phantom{00} \\ \hline 115 \\ - 115 \\ \hline 0 \end{array}$$



Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:

- 1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
- 2) выполнить деление на натуральное число.

$$\checkmark 25,6 : 0,08 = 2560 : 8 = 320.$$

$$\checkmark 12,35 : 2,5 = 123,5 : 25 = 4,94.$$

## ► ОКРУГЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Десятичную дробь можно округлить:

- ★ до определённого разряда дробной части: десятых, сотых, тысячных, десятитысячных и т. д.;
- ★ до целого числа с точностью до единиц, десятков, сотен и т. д.

### Правила округления

- 1) Найти цифру округляемого разряда.
- 2) Отделить вертикальной чертой все цифры, стоящие справа от округляемого разряда.
- 3) Если первая отбрасываемая цифра — 0, 1, 2, 3 или 4, то последняя оставшаяся цифра записывается без изменений, а все цифры после вертикальной черты отбрасываются.

Если первая отбрасываемая цифра — 5, 6, 7, 8 или 9, то к последней оставшейся цифре надо добавить 1, а все цифры после вертикальной черты отбросить.

- ✓ Округлить до десятых:  $37,4\underset{|}{4}9 \approx 37,4$ .
- ✓ Округлить до сотых:  $0,64\underset{|}{5}1 \approx 0,65$ .
- ✓ Округлить до единиц (до целых):  $957,\underset{|}{8}02 \approx 958$ .

Если при округлении десятичной дроби последняя из оставшихся цифр в дробной части — 0, то отбрасывать этот нуль нельзя. В таком случае нуль в дробной части показывает, до какого разряда округлено число.

- ✓ Округлить до тысячных:  $2,849\underset{|}{6}13 \approx 2,850$ .

Если десятичную дробь нужно округлить до разряда выше единиц (десятков, сотен и т. д.), то дробная часть отбрасывается, а целая часть округляется по правилам округления натуральных чисел.

- ✓ Округлить до десятков:  $96\underset{|}{3},806 \approx 960$ .
- ✓ Округлить до сотен:  $54\underset{|}{7}1,83 \approx 5500$ .

## ► ЗАДАЧИ НА ЧАСТИ И ПРОЦЕНТЫ

**Процент** — это сотая часть числа. Обозначается знаком «%», используется для выражения доли чего-либо по отношению к целому.

Чтобы выразить целое или дробное число в процентах, надо умножить его на 100 и к полученному результату приписать знак процента (%).

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

### Нахождение части (процента) от числа

- ★ Чтобы найти дробь (часть) от числа, нужно это число умножить на данную дробь.

✓ Найти  $\frac{3}{7}$  от 28.

$$28 \cdot \frac{3}{7} = 12.$$



✓ Найти  $\frac{2}{5}$  от 45.

$$45 \cdot \frac{2}{5} = 18.$$

★ Чтобы **найти процент от числа**, нужно данное число умножить на дробь, выражающую указанный процент.

✓ Найти 30 % от 54.

$$30 \% = 0,3; 54 \cdot 0,3 = 16,2.$$

### Нахождение числа по его части (проценту)

★ Чтобы **найти число по его части**, выраженной дробью, нужно данное число разделить на эту дробь.

✓ Найти число, если 0,4 его равно 10.

$$10 : 0,4 = 100 : 4 = 25.$$

★ Чтобы **найти число по его проценту**, нужно данное число разделить на дробь, выражающую указанный процент.

✓ Найти число, 25 % которого составляют 18.

$$25 \% = \frac{1}{4}; 18 : \frac{1}{4} = 18 \cdot 4 = 72.$$

### Нахождение того, какую часть (какой процент) одно число составляет от другого

★ Чтобы найти, **какую часть первое число составляет от второго**, надо первое число разделить на второе (то есть найти отношение чисел).

✓ Какую часть 30 составляет от 25?

$$\frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

✓ Какую часть 8 составляет от 12?

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

★ Чтобы найти, **сколько процентов первое число составляет от второго**, надо первое число разделить на второе и умножить на 100 % (то есть найти отношение чисел, умноженное на 100 %).

✓ Сколько процентов 12 составляет от числа 60?

$$\frac{12}{60} \cdot 100 \% = \frac{1 \cdot 100 \%}{5} = 20.$$

### ► ПРОПОРЦИИ

**Пропорция** — это равенство двух отношений, то есть равенство вида:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ или } a:b = c:d,$$

где  $a, d$  — крайние члены пропорции;  $b, c$  — средние члены пропорции.

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, то есть  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Неизвестный член пропорции можно найти, пользуясь основным свойством.

★ Крайний член равен произведению средних членов, разделённому на другой крайний член:

$$a = \frac{b \cdot c}{d}; d = \frac{b \cdot c}{a}.$$

★ Средний член равен произведению крайних членов, разделённому на другой средний член:

$$b = \frac{a \cdot d}{c}; c = \frac{a \cdot d}{b}.$$

### Нахождение процента от числа

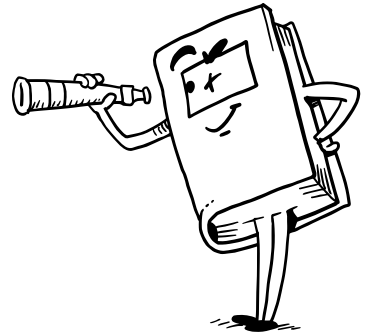
Найти  $a\%$  от числа  $b$ .

$$\begin{array}{l} b - 100\% \\ x - a\% \end{array} \left| \Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{100}{a} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{100}.$$

### Нахождение числа по его проценту

Найти число,  $a\%$  которого составляют  $c$ .

$$\begin{array}{l} c - a\% \\ x - 100\% \end{array} \left| \Rightarrow \frac{c}{x} = \frac{a}{100} \Rightarrow x = \frac{c \cdot 100}{a}.$$



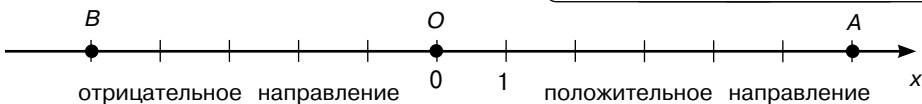
## Целые и рациональные числа

Числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются **противоположными**.

✓  $-a$  — число, противоположное  $a$ .

### ► КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

**Координатной** называется прямая, на которой выбраны начало отсчёта, направление и единичный отрезок. **Координата точки** — число, которое отображает положение точки на координатной прямой.



Противоположные числа изображаются на координатной прямой с разных сторон от начала отсчёта, но на одинаковом расстоянии от него. Число 0 противоположно самому себе.

### Отрицательные числа

★ Изображаются точками на отрицательном луче  $OB$ .

★ Записываются со знаком «-».

✓  $-5$  — координата точки  $B$ .

Записывается:  $B(-5)$ .

### Число ноль (0)

★ Изображается точкой  $O$ .

★ Число  $0$  не является ни положительным, ни отрицательным.

✓ Число  $0$  — координата точки  $O$ .

Записывается:  $O(0)$ .

### Положительные числа

★ Изображаются точками на положительном луче  $OA$ .

★ Записываются без знака или со знаком «+».

✓  $6$  — координата точки  $A$ .

Записывается:  $A(6)$ .

### ► МОДУЛЬ ЧИСЛА. СВОЙСТВА МОДУЛЯ

**Модулем** (абсолютной величиной) действительного числа  $a$  называется само это число, если  $a \geq 0$ , и противоположное число  $-a$ , если  $a < 0$ . Модуль числа  $a$  обозначается  $|a|$ .

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

★ Модуль любого числа — неотрицательное число:  $|a| \geq 0$ .

★ Модули противоположных чисел равны:  $|a| = |-a|$ .

★ Величина числа не превышает величину его модуля:  $a \leq |a|$ .

★ Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел:  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ .

★ Модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

★ Модуль квадрата числа равен квадрату его модуля:  $|a^2| = |a|^2$ .

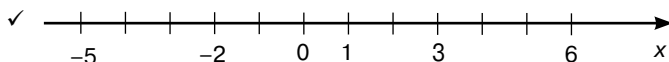
★ Модуль суммы не превышает сумму модулей слагаемых:  $|a+b| \leq |a| + |b|$ .



**Геометрический смысл:** модуль числа — это расстояние от начала отсчёта до данного числа.

### ► СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

★ Из двух чисел больше то число, которое на координатной прямой изображается правее.



$$-5 < -2; -2 < 0; 0 < 3; 1 > -5; 3 < 6.$$