

Н.А. Ким

МАТЕМАТИКА

ПОЛНЫЙ ЭКСПРЕСС-РЕПЕТИТОР

**ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
к ЕДИНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ
ЭКЗАМЕНУ**

Издательство АСТ
Москва
2021

УДК 373:51
ББК 22.1я721
К40

Ким, Наталья Анатольевна.

К40 Математика : полный экспресс-репетитор для подготовки к единому государственному экзамену / Н.А. Ким. — Москва: Издательство АСТ, 2021. — 319, [1] с.: ил.

ISBN 978-5-17-136289-8

Пособие рассчитано на самостоятельную или под руководством учителя подготовку школьников к ЕГЭ.

В него в полном объёме включён материал курса по математике, который проверяется на экзаменах базового и профильного уровней.

Теоретическая часть пособия представлена в краткой и доступной форме в виде экспресс-курса. Большое количество схем и таблиц позволяет легко и быстро сориентироваться в теме и найти нужную информацию.

В практическую часть включены разборы экзаменационных заданий и задачи для самостоятельной отработки с ответами в конце пособия. Тренировочные задания соответствуют современному формату ЕГЭ.

**УДК 373:51
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-17-136289-8

© Ким Н.А., 2021
© ООО «Издательство АСТ», 2021

Содержание

Введение	6
ТЕМА 1.	
ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	10
1.1. Арифметические действия. Корень.	
Степень. Логарифм	10
Арифметические действия с натуральными числами.	11
Признаки делимости натуральных чисел ..	11
Модуль числа	14
Арифметические действия с действительными числами	15
Дроби	17
Логарифм	23
1.2. Числовые и буквенные выражения	26
Геометрические формулы	26
Алгеброические формулы	29
Формулы из «физических задач»	30
Формулы из «экономических задач»	32
1.3. Преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции	36
Формулы сокращённого умножения	36
Углы на тригонометрической окружности ..	42
Определение тригонометрических функций	42
Обратные тригонометрические функции ...	43
Формулы приведения	44
Знаки преобразуемых тригонометрических функций	44
Тригонометрические формулы	45
Задания для самостоятельного решения	49
ТЕМА 2.	
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	63
2.1. Уравнения	63
Особенности решения уравнений разных типов	64

Иррациональные уравнения	67
Показательные	
и логарифмические уравнения	71
Тригонометрические уравнения	73
Свойства элементарных функций	75
2.2. Неравенства	78
Решение неравенств	79
Алгебраические неравенства	80
Метод интервалов	81
Иррациональные неравенства	86
Показательные и логарифмические	
неравенства	88
Задания для самостоятельного решения	101

ТЕМА 3.

ЧТЕНИЕ ГРАФИКОВ И ДИАГРАММ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ	118
3.1. Чтение графиков и диаграмм	118
3.2. Исследование функций	124
Графики элементарных функций	124
Свойства элементарных функций	128
Чтение функции по изображённому графику	128
Исследование функции с помощью	
производной	129
Применение производной к исследованию	
функции	130
Задания для самостоятельного решения	150

ТЕМА 4.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ	171
4.1. Планиметрические задачи	171
Углы	171
Треугольники	172
Четырёхугольники. Многоугольники	178
Окружность	181
4.2. Стереометрические задачи	196
Пирамида	198
Параллелепипед	200
Тела вращения	201
Задания для самостоятельного решения	210

ТЕМА 5.	
ИССЛЕДОВАНИЕ	
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	216
5.1. Математические модели	
на языке алгебры	216
Задачи на части и проценты	226
Задачи на выполнение определённого	
объёма работ	230
Задачи на движение	232
Задачи на сплавы, растворы и смеси	236
5.2. Математические модели	
на языке геометрии	241
5.3. Математические модели	
на языке логики	244
5.4. Математические модели	
на языке вероятности	247
Основные понятия теории вероятностей ...	248
Задания для самостоятельного решения	255
 ТЕМА 6.	
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ	275
6.1. Текстовая задача на части	
и проценты	275
6.2. Текстовая арифметическая задача	279
6.3. Задание на сопоставление	
различных величин	282
Задания для самостоятельного решения	288
 ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ	
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ...	297
 Справочные материалы	313

Введение

Организация систематического повторения материала, изученного в 5–11 классах, является основной подготовки к ЕГЭ. Данная книга — «Полный экспресс-репетитор» — учебное пособие для быстрой и эффективной подготовки школьников к единому государственному экзамену по математике базового и профильного уровней. Она будет полезна и преподавателям, занимающихся подготовкой учащихся к сдаче экзамена в формате ЕГЭ.

Пособие призвано оказать помощь в систематизации, углублении, обобщении знаний основных тем курса:

- «Вычисления и преобразования»,
- «Уравнения и неравенства»,
- «Чтение графиков и диаграмм. Исследование функций»,
- «Геометрические задачи»,
- «Исследование математической модели»,
- «Прикладные задачи».

Материал данного пособия содержит в себе всё необходимое, чтобы вам не пришлось «вооружаться» огромным количеством дополнительных книг и электронных источников.

Экзаменационные задания создаются по кодификатору требований к уровню вашей подготовки. Для успешной подготовки к ЕГЭ на базовом и профильном уровне нужны определённые умения и навыки по всем разделам математики.

Чтобы понять, каких навыков у вас нет или они не выражены, можно решить демонстрационный вариант, представленный на сайте официального разработчика экзаменационных материалов www.fipi.ru. Проанализируйте свои результаты: сколько времени ушло на решение каждого задания, какие задания не были вообще решены, определите какие задания вызвали сложность при их решении.

С нашим экспресс-репетитором вы легко преодолаете сложности при подготовке к экзаменам. Занимаясь по нему, приобретёте умения и навыки для уверенной и успешной сдачи единого государственного экзамена.

В пособии вы найдёте теорию, разбор типовых заданий и тестовые задания для самостоятельного решения, необходимые для подготовки к решению заданий ЕГЭ на базовом и профильном уровнях.

Материал пособия подобран и изложен на основе большого педагогического опыта автора в подготовке учеников к экзаменам по математике в формате и ОГЭ, и ЕГЭ.

СОВЕТ

Постарайся запомнить как можно больше формул. На экзамене вместе с заданиями тебе будут выданы некоторые справочные материалы. Их мы разместили в конце пособия. Ознакомься с ними, так тебе будет проще понять, какую информацию следует выучить, а какой ты сможешь воспользоваться из предоставленных экзаменационных материалов. Внимательно разбери примеры, не пропускай их. Они помогут лучше усвоить правила и алгоритмы вычислений, отработать навыки быстрого выполнения заданий разных типов.

Список необходимых умений для успешной сдачи ЕГЭ по математике представлен в таблице ниже.

1	Уметь выполнять вычисления и преобразования
1.1	Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма

1.2	Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования
1.3	Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции
2	Уметь решать уравнения и неравенства
2.1	Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
2.2	Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы
3	Уметь выполнять действия с функциями
3.1	Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций
3.2	Вычислять производные и первообразные элементарных функций
3.3	Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции
4	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами
4.1	Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)
4.2	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы

5	Уметь строить и исследовать простейшие математические векторы
5.1	Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры
5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения
5.4	Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий
6	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни
6.1	Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчёты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах
6.2	Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий экзаменационной работы по информатике рекомендуем в процессе подготовки к ОГЭ обращаться к материалам сайта официального разработчика КИМ — Федерального института педагогических измерений: www.fipi.ru.

Тема 1

ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вспомним такие понятия, как натуральные числа, дроби, рациональные и действительные числа, корень, степень, логарифм. Научимся вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

СОВЕТ

Постарайся запомнить как можно больше формул.

В основном теоретический материал данного раздела рассчитан на базовый уровень освоения математики, но есть часть теории, которая необходима для решения задач на профильном уровне.

Внимательно разбери примеры, не пропускай их. Они помогут лучше усвоить правила и алгоритмы вычислений, отработать навыки быстрого выполнения заданий разных типов.

1.1. Арифметические действия. Корень. Степень. Логарифм

Изучив материал данного раздела вы научитесь выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корней натуральной степени большей 1, степени с рациональным показателем, логарифма.



ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Арифметические действия с натуральными числами

Закон	Действия	
	Сложение $a + b = p$ a, b — слагаемые, p — сумма	Умножение $a \cdot b = p$ a, b — множители, p — произведение
Переместительный	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Сочетательный	$(a + b) + c =$ $= a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Распределительный	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Признаки делимости натуральных чисел

Обозначение: a делится на $b \Leftrightarrow a : b$

Чётные числа: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Число делится на <u>2</u> ($2 = 2^1$), если его последняя цифра чётная	$11135\underline{4} : 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4$ — чётное число
Число делится на <u>4</u> ($4 = 2^2$), если число составленное из последних двух цифр, делится на 4	$173\underline{32} : 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 32 : 4 = 8$
Число делится на <u>8</u> ($8 = 2^3$), если число составленное из последних трёх цифр, делится на 8	$972\underline{16} : 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow 216 : 8 = 27$
Число делится на <u>5</u> ($5 = 5^1$), если его последняя цифра 0 или 5	$371\underline{5} : 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5$ — последняя цифра

Число делится на <u>25</u> ($25 = 5^2$), если число, составленное из двух последних цифр, делится на 25 или две последние цифры 0	$173\mathbf{75} : 25 \Rightarrow$ $\Rightarrow 75 : 25 = 3$
Число делится на <u>10</u> , если его последняя цифра 0	$53\mathbf{0} : 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0$ — последняя цифра
Число делится на <u>3</u> , если сумма его цифр делится на 3	$381 : 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 + 8 + 1 =$ $= 12; 12 : 3 = 4$
Число делится на <u>9</u> , если сумма его цифр делится на 9	$927 : 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow 9 + 2 + 7 =$ $= 18; 18 : 9 = 2$
Число делится на <u>11</u> , если разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11	$85\mathbf{36} : 11 \Rightarrow$ $\Rightarrow (3 + 8) -$ $- (5 + 6) = 0;$ $0 : 11 = 0$

СОВЕТ

Для решения задач базового уровня на вычисление значения числового или буквенного выражения, нахождение чисел, удовлетворяющих определенным условиям, используют признаки делимости чисел.



ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

БУ Задание №1. Найдите четырёхзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и чётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение.

Число делится на 88, если оно делится на 8 и на 11.

Признак делимости на 8: число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 8.

Признак делимости на 11: число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, либо разность этих сумм делится на 11.

Используя признак делимости на 8 и учитывая, что все цифры искомого числа должны быть чётными и различны, получаем, что последними цифрами числа могут быть: 024, 048, 064, 208, 240, 264, 280, 408, 480, 608, 624, 640, 648, 680, 824, 840, 864.

Используя признак делимости на 11 получим, что условию задачи удовлетворяют числа: 6248, 8624, 2640.

Ответ: 2640 или 6248, или 8624.

БУ Задание №2. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 даёт в остатке 2 и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение.

При делении на 4 число даёт в остатке 2, следовательно, оно чётное. Поскольку число при делении на 5 даёт в остатке 2, то оно может оканчиваться на 2 или на 7. Таким образом, число обязательно должно заканчиваться цифрой 2. Подбором находим, что условию задачи удовлетворяют числа 662 и 722.

Ответ: 662 или 722.

БУ Задание №3. Приведите пример четырёхзначного натурального числа, кратного 4, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение. Пусть наше число имеет вид $\overline{abcd}$. Тогда имеем: $a + b + c + d = \overline{a \cdot b \cdot c \cdot d}$. И так как число делится на 4, $10c + d$ делится на 4. Можно заметить, что если среди цифр есть хотя бы три единицы, то равенство невозможно, так как сумма будет больше произведения. Если единица только одна, то произведение будет слишком большое. Таким образом, среди цифр есть ровно две единицы. Рассмотрим двузначные числа, которые делятся на 4, две их последние цифры образуют число, делящееся на 4. Нельзя брать числа с нулём, так как в этом случае произведение будет равно нулю.

12: тогда одна из оставшихся цифр 1, а другая 4.

16: тогда одна из оставшихся цифр 1, а никакая другая не подойдёт.

24: значит, оставшиеся цифры — единицы.

Остальные числа будут давать слишком большое произведение или нечётную сумму.

Таким образом, искомые числа: 1412, 4112, 1124.

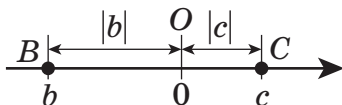
Ответ: 1124 или 1412, или 4112.



ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Модуль числа

Модулем числа называют расстояние от начала отсчёта до точки, изображающей это число на координатной прямой.



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a > 0; \\ 0, & \text{при } a = 0; \\ -a, & \text{при } a < 0; \end{cases} = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0; \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Примеры:

1) $|-3| = -(-3) = 3;$

2) $|5| = 5;$

3) $|0| = 0;$

4) $|4,6| = 4,6;$

5) $\left| -5\frac{3}{7} \right| = -\left(-5\frac{3}{7} \right) = 5\frac{3}{7}.$

Формулы для профильного уровня

$|x| \geq 0$

$|-x| = |x|$

$|x| \geq x$

$|x|^2 = x^2$

$|x - y| \geq |x| - |y|$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

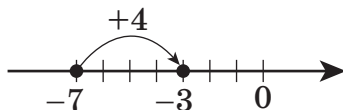
$|x : y| = |x| : |y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Арифметические действия с действительными числами

Сложение рациональных чисел

Если к числу a прибавить положительное число b , то точка с координатой a переместится по координатной прямой на b единичных отрезков вправо.



$-7 + 4 = -3$