

→ Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
--------------------------	----------

ЧАСТЬ I.

Геометрия на свежем воздухе

Глава 1. Геометрия в лесу	10
По длине тени	10
Еще два способа	15
По способу Жюль Верна	18
С помощью записной книжки	20
Не приближаясь к дереву	21
Высотомер лесоводов	22
С помощью зеркала	26
Две сосны.....	28
Форма древесного ствола	28
Универсальная формула	30
Объем и вес дерева на корню.....	32
Геометрия листьев	35
Шестиногие богатыри.....	37
Глава 2. Геометрия у реки	40
Измерить ширину реки.....	40
Длина острова	46
Пешеход на другом берегу.....	47
Простейшие дальномеры.....	49
Энергия реки	51
Скорость течения	53
Сколько воды протекает в реке.....	55
Водяное колесо	58
Круги на воде.....	59
Фантастическая шрапнель	61
Килевая волна.....	62
Скорость пушечных снарядов.....	65
Глубина пруда.....	67
Звездное небо в реке	68
Путь через реку	71
Построить два моста.....	73
Глава 3. Геометрия в открытом поле	74
Видимые размеры Луны	74
Угол зрения	78

Тарелка и Луна	79
Луна и медные монеты	80
Живой угломер	82
Посох Якова	86
Грабельный угломер	88
Угол артиллериста	89
Острота вашего зрения	92
Предельная минута	93
Луна и звезды у горизонта	97
Какой длины тень Луны и тень стратостата	100
Высоко ли облако над землей?	102
Высота башни по фотоснимку	107
Глава 4. Геометрия в дороге	110
Искусство мерить шагами	110
Глазомер	111
Уклоны	115
Кучи щебня	118
«Гордый холм»	119
У дорожного закругления	121
Радиус закругления	122
Дно океана	125
Существуют ли водяные горы?	128
Глава 5. Походная тригонометрия	
без формул и таблиц	130
Вычисление синуса	130
Найти угол по синусу	135
Высота Солнца	137
Расстояние до острова	138
Ширина озера	140
Треугольный участок	142
Определение величины угла без всяких измерений	144
Глава 6. Где небо с землей сходятся	146
Горизонт	146
Корабль на горизонте	149
Дальность горизонта	150
Башня Гоголя	154
Холм Пушкина	156
Где рельсы сходятся	157
Задачи о маяке	158
Молния	159
Парусник	160
Горизонт на Луне	161

В лунном кратере	162
На Юпитере.....	163

Глава 7. Геометрия Робинзонов	
(страницы из Жюль Верна)	164
Геометрия звездного неба (несколько страниц	
из Жюль Верна)	164
Широта «таинственного острова»	168
Определение географической долготы.....	172

ЧАСТЬ II.

Между делом и шуткой в геометрии

Глава 8. Геометрия впотьмах.....	176
На дне трюма	176
Измерение бочки.....	177
Мерная линейка (задача Майн Рида).....	178
Что и требовалось выполнить	180
Проверка расчета	182
Ночное странствование Марка Твена.....	186
Загадочное кружение.....	189
Измерение голыми руками.....	199
Прямой угол в темноте	201
Глава 9. Старое и новое о круге	202
Практическая геометрия египтян и римлян	202
«Это я знаю и помню прекрасно»	204
Ошибка Джека Лондона.....	207
Бросание иглы.....	208
Выпрямление окружности	210
Квадратура круга	212
Треугольник Бинга	217
Голова или ноги	219
Проволока вдоль экватора.....	220
Факты и расчеты	221
«Девочка на канате»	225
Путь через полюс	229
Длина приводного ремня.....	236
Задача о догадливой вороне.....	240
Глава 10. Геометрия без измерений и без вычислений ...	242
Построение без циркуля	242
Центр тяжести пластинки.....	243
Задача Наполеона	245

Простейший трисектор	247
Часы-трисектор	248
Деление окружности.....	249
Направление удара (задача о бильярдном шаре)	252
«Умный» шарик.....	254
Одним росчерком.....	260
Семь мостов Калининграда.....	264
Геометрическая шутка	265
Проверка формы.....	266
Игра	266
Глава 11. Большое и малое в геометрии.....	268
Объем и давление.....	268
Тоньше паутины, но крепче стали	270
Две банки.....	273
Исполинская папирosa	274
Яйцо страуса.....	274
Яйцо эпиорниса	275
Яйца русских птиц.....	276
Определить вес скорлупы, не разбивая яйца	277
Размеры советских монет	278
Монета в миллион рублей.....	279
Наглядные изображения	280
Наш нормальный вес	283
Великаны и карлики	284
Геометрия Гулливера.....	285
Почему пыль и облака плавают в воздухе.....	288
Глава 12. Геометрическая экономия	292
Как Пахом покупал землю (задача Льва Толстого)	292
Замечательное свойство квадрата	298
Участки другой формы.....	300
Фигуры с наибольшей площадью.....	302
Гвозди	305
Тело наибольшего объема.....	306
Произведение равных множителей	307
Треугольник с наибольшей площадью	309
Самый тяжелый брус	310
Из картонного треугольника	311
Затруднение жестянщика	313
Затруднение токаря	315
Как удлинить доску?	317

→ Предисловие

«Занимательная геометрия» написана как для друзей математики, так и для тех, от кого почему-либо оказались скрытыми многие привлекательные стороны математики.

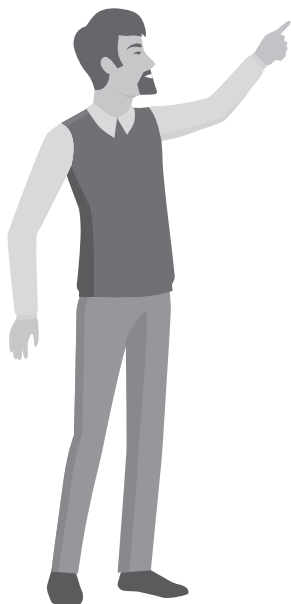
Еще больше эта книга предназначена для читателей, которые обучались (или сейчас обучаются) геометрии только у классной доски и поэтому не привыкли замечать знакомые геометрические отношения в окружающем нас мире вещей и явлений, не приучились пользоваться приобретенными геометрическими знаниями на практике, в затруднительных случаях жизни, в походе, в бивуачной или фронтовой обстановке.

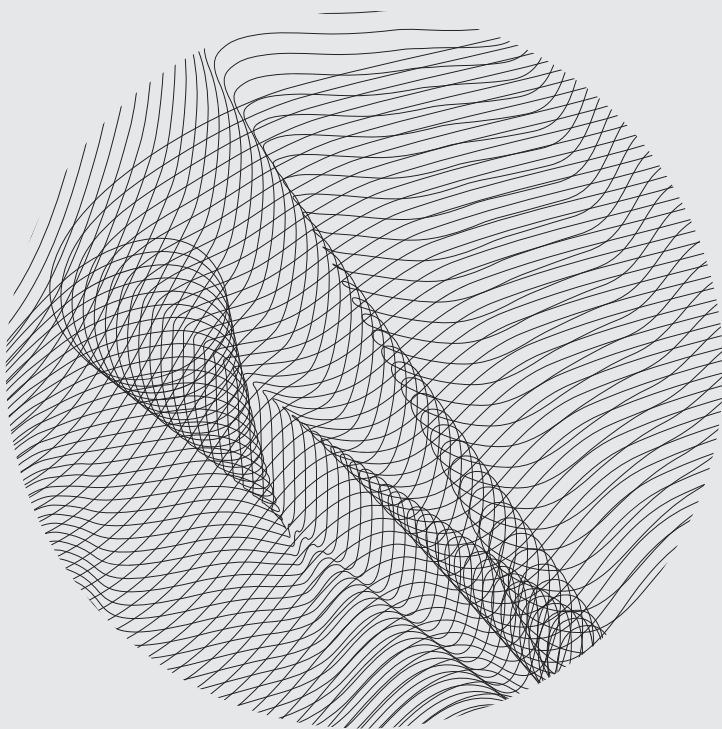
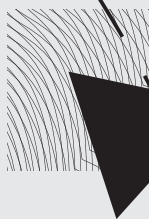
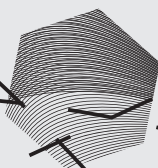
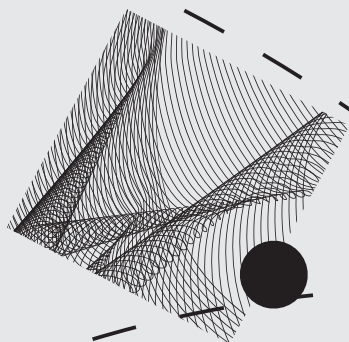


**Яков Исидорович
Перельман
(1882–1942)**

Возбудить у читателя интерес к геометрии или, говоря словами автора, «внушить охоту и воспитать вкус к ее изучению» — прямая задача настоящей книги.

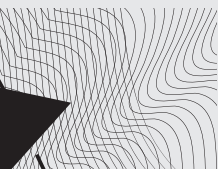
Автор выводит геометрию «из стен школьной комнаты на вольный воздух, в лес, поле, к реке, на дорогу, чтобы под открытым небом отдаться непринужденным геометрическим занятиям без учебника и таблиц», привлекает внимание читателя к страницам Л. Н. Толстого и А. П. Чехова, Ж. Верна и М. Твена, находит тему для геометрических задач в произведениях Н. В. Гоголя и А. С. Пушкина и, наконец, предлагает «пестрый подбор задач, любопытных по сюжету, неожиданных по результату».





ЧАСТЬ I

ГЕОМЕТРИЯ НА СВЕЖЕМ ВОЗДУХЕ



“ Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры. ”

Галилей



→ По длине тени



Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил

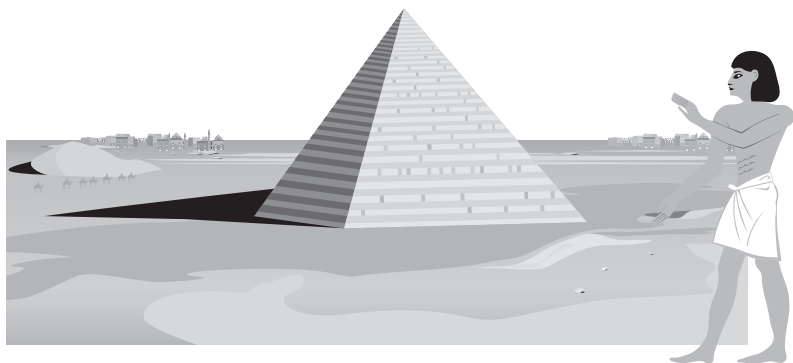
прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, я понял, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения с помощью весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ, без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес, говорит предание, избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени*. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени...



*Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды, ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.



Задача греческого мудреца представляется нам теперь по-детски простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключение в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, а именно следующие два (из которых первое Фалес открыл сам):

1) углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно — стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собой;

2) сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

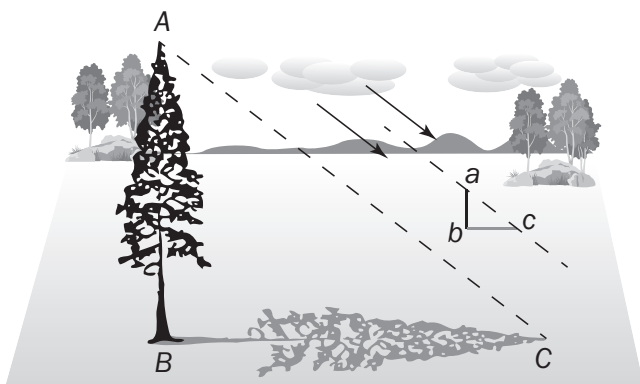
Только вооруженный этим знанием Фалес вправе был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречаются ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: Солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции:

$$AB : ab = BC : bc,$$

то есть высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников ABC и abc (по двум углам).



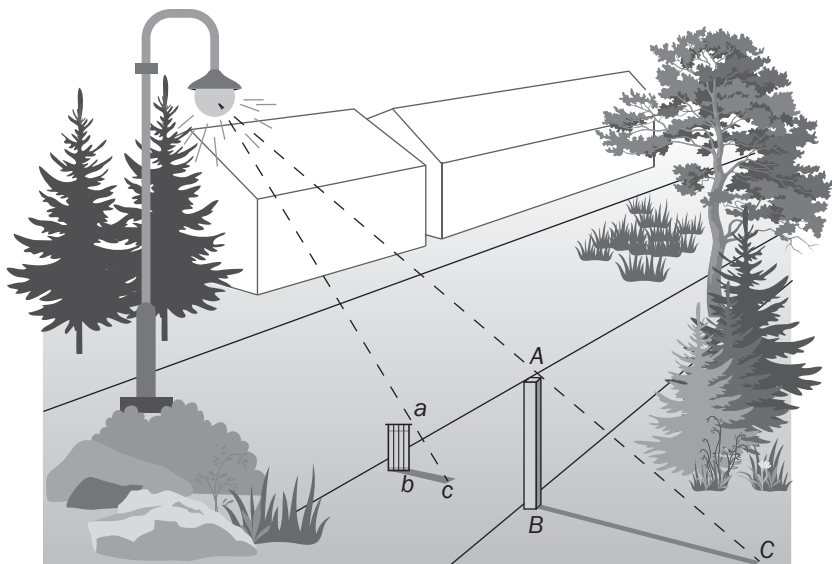
▲ Измерение высоты дерева по тени

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, — оно не оправдается. На рисунке (с. 13) в задаче вы видите, что столбик AB выше тумбы ab примерно втрое, а тень столбика больше тени

тумбы ($BC : bc$) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, а в другом нет, без геометрии невозможно.

ЗАДАЧА

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря — непараллельны. Последнее очевидно, но почему вправе мы считать лучи Солнца параллельными, хотя они, безусловно, пересекаются в том месте, откуда исходят?



▲ Когда такое измерение невыполнимо

РЕШЕНИЕ

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными, потому что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю на расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну нож-

ку циркуля в эту точку Солнца, а другой описали окружность радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли (то есть радиусом 150 000 000 км), то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга длиной 1 км. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi r \times 150\,000\,000\text{ км} = 940\,000\,000\text{ км}$. Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, то есть около 2 600 000 км, одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, то есть равна 43 000 км, а одна дуговая секунда еще в 60 раз меньше, то есть 720 км. Но наша дуга имеет длину

всего 1 км, значит, она соответствует углу $\frac{1}{720}$ секунды. Такой

ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов, следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, параллельными прямыми*.

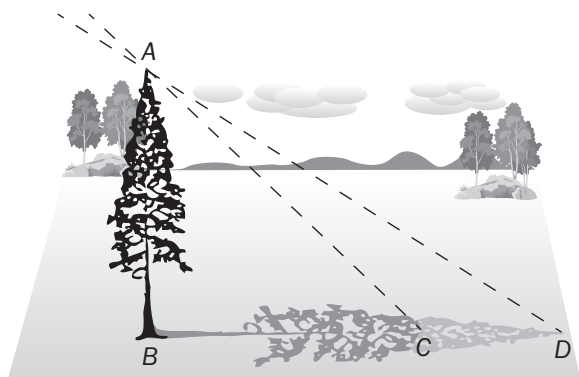
Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.



Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая

тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рисунке показано, почему вследствие этого тень BC дерева имеет еще придаток в виде полутени CD , постепенно сходящей на нет.

*Другое дело лучи, направленные от какой-нибудь точки Солнца к концам земного диаметра; угол между ними достаточно велик для измерения (около $17''$). Определение этого угла дало в руки астрономов одно из средств, для того чтобы установить, как велико расстояние от Земли до Солнца.



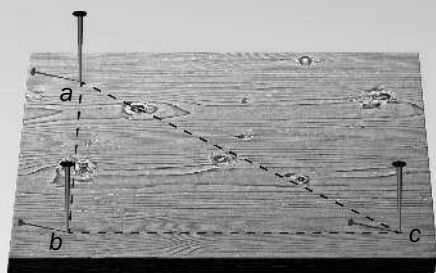
▲ Как образуется полутень

Угол CAD между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, то есть половине градуса. Ошибка, происходящая оттого, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком даже низком стоянии Солнца достигать 5 % и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т. д. — и делает окончательный результат малонадежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

→ Еще два способа

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.

Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника и в них втыкают торчком по булавке. Пусть у вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги



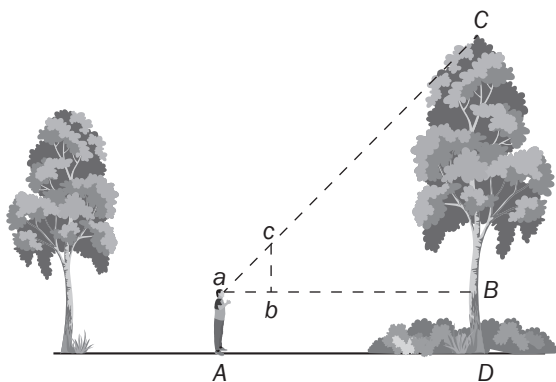
▲ **Булавочный прибор для измерения высот**

один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния.

Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

Обращение с ним не сложнее изготовления.

Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место А, из которого, глядя на булавки а и с, увидите, что они покрывают верхушку



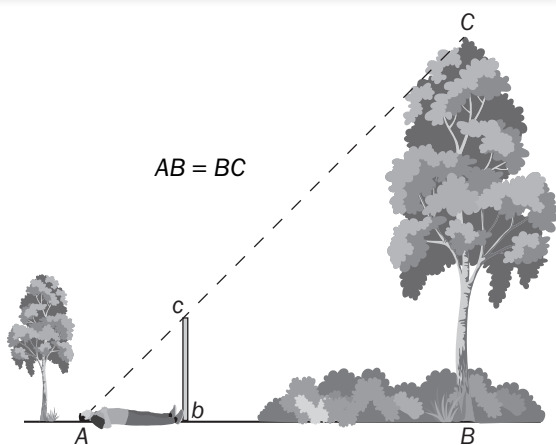
▲ **Схема применения булавочного прибора**

С дерева: это значит, что продолжение гипотенузы ac проходит через точку C . Тогда, очевидно, расстояние aB равно CB , так как угол $a = 45^\circ$.



Следовательно, измерив расстояние aB (или на ровном месте одинаковое с ним расстояние AD) и прибавив BD , то есть возвышение aA глаза над землей, получите искомую высоту дерева.

По другому способу вы обходитесь даже без булавочного прибора. Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту. Место для шеста надо выбрать таким образом, чтобы, лежа, как показано на рисунке, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник Abc — равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45^\circ$ и, следовательно, $AB = BC$, то есть искомой высоте дерева.



▲ Другой способ определения высоты