

Р. СМАЛЛИАН

ПРИНЦЕССА ИЛИ ТИГР?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
В ЗАДАЧАХ И ГОЛОВОЛОМКАХ



Москва
Издательский Дом
Мещерякова
2022

Предисловие

Из множества занятных писем, присланных мне после выхода в свет моей первой книги логических головоломок (названия её я никак не упомяну!)*, одно принадлежало десятилетнему сыну довольно известного математика, с которым я в своё время учился в школе. В письме предлагалась весьма изящная и оригинальная задача, навеянная некоторыми задачками из моей книжки, которую мальчик прочитал взахлёб. Я сразу же позвонил отцу, решив поздравить его с таким умницей. Но тот, прежде чем позвать к телефону самого парнишку, стал разговорщицки шептать в трубку: «Ему страшно нравится твоя книга! Но когда будешь с ним толковать, не проговорись, что эта штука называется математикой, — в школе он её просто ненавидит! Чуть заподозрит, что твоя книжка математическая, тут же забросит её подальше».

* Речь идёт о книге «Как же называется эта книга?» — *Примеч. ред.*

Я вспомнил об этой истории потому, что она представляет собой иллюстрацию странного, но распространённого явления. Множество людей, с которыми я сталкивался, утверждали, что ненавидят математику, и в то же время с азартом накидывались на любую логическую или математическую задачу, которую я им подсовывал, стоило лишь облечь её в форму занимательной головоломки. Я бы ничуть не удивился, если бы хорошие сборники головоломок оказались одним из лучших лекарств против так называемого страха перед математикой. Более того, любой учебник математики вполне можно переписать в форме набора занимательных задач. Я иногда воображал, что бы произошло, если бы Евклид представил свои классические «Начала» именно в таком виде. Например, вместо того, чтобы сформулировать в качестве теоремы утверждение о равенстве углов, лежащих в основании равнобедренного треугольника, а затем строго доказать эту теорему, Евклид начал бы так: «Задача. Дан треугольник с двумя равными сторонами. Всегда ли у него есть два равных угла? Если да, то почему, если нет, то тоже почему? (Решение смотри на странице такой-то.)» А потом и все остальные теоремы постарался бы изложить в таком же духе. Такая книжка вполне могла бы оказаться одним из самых популярных сборников задач в истории!

Вообще-то мои собственные сборники задач отличаются тем, что меня в первую очередь привлекают задачи, связанные с наиболее глубокими

жаются в глубокие воды потока, ведущего в самое сердце великого открытия Гёделя. Конечно же, замок сейфа из Монте-Карло оказывается «гёделевым», а его *modus operandi** прекрасно иллюстрирует фундаментальную идею Гёделя, влияние и результаты которой обнаруживаются во многих научных теориях, связанных с таким удивительным явлением, как процесс самовоспроизведения.

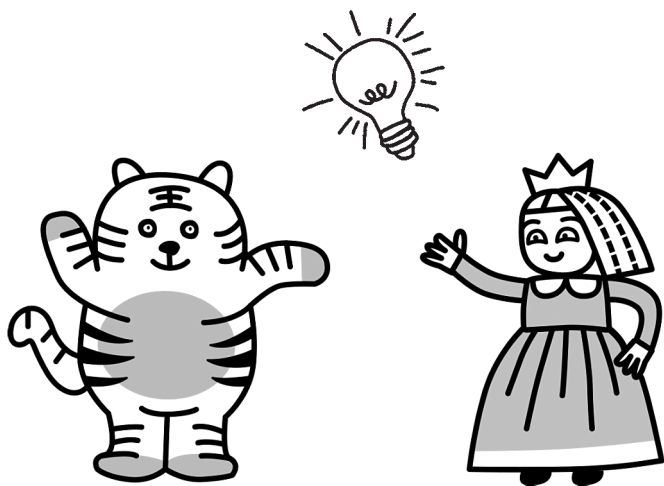
В конечном счёте исследования Крейга и его друзей приводят к весьма примечательным математическим открытиям, не известным до настоящего времени ни учёному миру, ни тем более широкой публике, — это так называемые «законы Крейга» и «законы Фергюссона», которые впервые преданы гласности на страницах книги. Несомненно, они должны заинтересовать как любителей математики, так и логиков, лингвистов и специалистов по вычислительной технике.

Книгу эту я писал с огромным удовольствием; хотелось бы, чтобы с таким же удовольствием её и читали. Наконец, хочу поблагодарить моего редактора Энн Клоуз и технического редактора Мелвина Розенталя за ту неоценимую помощь, которую они мне оказали.

*Рэймонд Смаллиан,
Элка-Парк, штат Нью-Йорк,
февраль 1982 г.*

* Принцип работы (лат.).

Принцесса или тигр?



Можно ли с помощью имеющейся информации установить, какого цвета марки у А, В и С?

10. Задача для тех, кто умеет играть в шахматы. Мне хотелось бы обратить ваше внимание на интересный класс головоломок с шахматами, которые в отличие от обычных шахматных задач типа «белые начинают и дают мат в столько-то ходов» заставляют нас обращаться к предыстории позиции, то есть исследовать, как она возникла на доске.

Однажды инспектор Крейг из Скотленд-Ярда, который интересовался такими задачами не меньше, чем Шерлок Холмс*, вместе с другом заглянул в шахматный клуб, где их внимание привлекла оставленная кем-то шахматная доска с фигурами.

— Те, кто разыгрывали эту партию, — заметил приятель Крейга, — судя по всему, совершенно не знакомы с правилами игры. Подобная позиция просто невозможна!

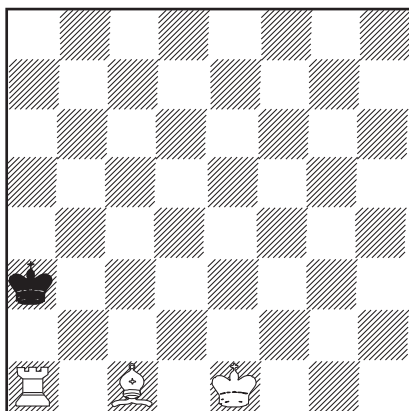
— Почему? — поинтересовался Крейг.

— Потому что чёрные находятся под шахом одновременно от белой ладьи и от белого слона. Как могли белые объявить такой шах? Если бы они просто сделали ход ладьёй, чёрный король уже находился бы под шахом от слона, а если бы

* Многие задачи этого типа представлены в моей книге «The Chess Mysteries of Sherlock Holmes» («Шахматные тайны Шерлока Холмса»). — *Примеч. авт.*

они сходили слонем, то король ещё перед этим должен был быть под шахом от ладьи. Поэтому такая позиция абсолютно нереальна!

Некоторое время Крейг внимательно изучал расположение фигур.



— Я думаю, — произнёс он наконец, — это не так. Конечно, позиция весьма экстравагантна, но всё же она вполне согласуется с правилами шахматной игры.

Тут Крейг оказался абсолютно прав! Данная позиция, хотя и выглядит на первый взгляд совершенно абсурдной, на самом деле вполне возможна, и мы можем даже указать последний ход белых. Что это был за ход?

Решения

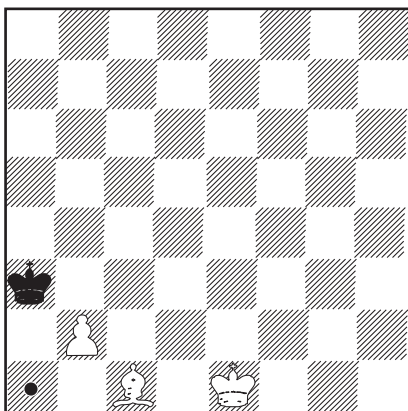
1. Распространённый неправильный ответ — 10 долларов. Допустим теперь, что у каждого из нас, скажем, по 50 долларов. Если я дам вам

8. В фирме было 12 служащих: 7 демократов и 5 республиканцев.

9. Единственным человеком, который может определить цвет своей марки, является С. Если бы марка С была красной, тогда В сразу сообразил бы, что его марка не может быть красной, рассуждая так: «Если бы моя марка тоже оказалась красной, тогда А, увидев перед собой две красные марки, сразу понял бы, что его марка не красная. Но А не знает, что его марка не красная. Следовательно, моя также не может быть красной».

Это рассуждение доказывает, что если бы марка С была красной, то В знал бы, что его марка — не красная. Но В не знает, что его марка не красная, и, следовательно, марка С не может быть красной. То же самое рассуждение, в котором слово «красная» мы заменим на «жёлтая», показывает, что марка С не может быть также и жёлтой. Таким образом, на лбу у С марка зелёного цвета.

10. В условии задачи не оговорено, какая сторона доски соответствует белым фигурам, а какая — чёрным. Читателю может показаться, что белые ходят снизу вверх, но тогда эта позиция действительно не могла бы возникнуть! На самом же деле белые фигуры перемещаются сверху вниз и перед последним ходом позиция на доске была такой, как показано на рисунке.



Жирная чёрная точка в левом нижнем углу доски означает произвольную фигуру чёрных (из условия не узнаешь, какую — ферзя, ладью, слона или коня). Далее белая пешка бьёт чёрную фигуру и превращается в ладью, после чего на доске возникает приведённая в условии задачи позиция.

Конечно, читатель вполне мог бы задаться вопросом: «А почему белая пешка превращается в ладью, а не в ферзя — не слишком ли это маловероятно?» Ответ заключается в том, что этот ход действительно маловероятен, но ведь любой другой ход в этом случае просто невозможен, а как однажды Шерлок Холмс проницательно заметил доктору Ватсону: «Когда мы отбрасываем невозможное, то, что остаётся, каким бы маловероятным оно нам ни представлялось, обязательно должно оказаться правдой».

Глава вторая

Принцесса или тигр?

У Фрэнка Стоктона есть сказка, которая называется «Принцесса или тигр?». В этой сказке один узник должен угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой — тигр. Если он укажет на первую комнату, то женится на принцессе, если на вторую, то его (вполне возможно) растерзает тигр.

В некотором царстве правил король. Однажды он тоже прочитал эту сказку.

— В самый раз для моих заключённых! — сказал он своему министру. — Только я не хочу полагаться на случайности. Пусть на дверях каждой комнаты повесят по табличке, а заключённому будет кое-что сказано о них. Если узник не дурак и способен рассуждать логически, он сумеет сохранить себе жизнь и в придачу заполучить прелестную невесту.

— Блестящая идея, ваше величество! — согласился министр.

Испытания первого дня

В самый первый день были проведены три испытания. При этом король объявил узнику, что в ходе всех трёх испытаний в каждой из комнат будет находиться либо принцесса, либо тигр, хотя вполне может статься, что сразу в обеих комнатах обнаружится по тигру или там окажутся одни лишь принцессы.

1. Первое испытание.

— А что, если в обеих комнатах сидят тигры? — спросил узник. — Что же мне тогда-то делать?

— Считай, не повезло, — ответил король.

— А если в обеих комнатах окажется по красавице? — поинтересовался узник.

— Считай, подфартило, — сказал король. — Уж это ты и сам бы мог сообразить!

— Ну хорошо, а если в одной комнате принцесса, а в другую посадили тигра, что тогда? — не успокаивался узник.

— Вот тут-то уже всё зависит от тебя! Не так ли?

— Да откуда же мне знать, где кто? — сокрушённо вздохнул узник.

Тут король указал на таблички, прикреплённые к дверям каждой из комнат. На них было написано:

I

В этой комнате находится принцесса, а в другой сидит тигр.

II

В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр.

— А это правда, что здесь написано? — спросил узник.

— На одной — правда, — отвечал король, — на другой — нет.

А вы на месте узника какую бы дверь открыли? (Конечно, если вы предпочитаете принцессу тигру.)

2. Второе испытание. Итак, первый узник спас себе жизнь и на радостях отбыл вместе с принцессой. Таблички на дверях сменили, соответственно были подобраны и обитатели комнат. На этот раз на табличках можно было прочитать следующее:

I

По крайней мере в одной из этих комнат находится принцесса.

II

Тигр сидит в другой комнате.

— Истинны ли утверждения на табличках? — спросил второй узник.

— Может, оба истинны, а может, оба ложны, — ответил ему король.

Какую из комнат следует выбрать второму узнику?

3. Третье испытание. Во время этого испытания король объявил, что опять утверждения на обеих табличках одновременно либо истинны, либо ложны. Надписи же вот какие:

I

Либо в этой комнате сидит тигр, либо принцесса находится в другой комнате.

II

Принцесса в другой комнате.

Кто же обнаружится в первой комнате — принцесса или тигр? А во второй?

Второй день

— Вчера мы сваяли дурака, — сказал король своему министру. — Все трое выкрутились! Ладно, сегодня у нас ещё пятеро, и я придумаю для них кое-что похлеще.

— Блестящая идея, ваше величество! — поддержал министр.

И во всех испытаниях этого дня относительно левой комнаты (комната I) король говорил вот что:

— Если в этой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, если же тигр, то ложно.

В правой же комнате (комната II) всё было наоборот: утверждение на табличке ложно, если в комнате находится принцесса, и истинно, если

в комнате сидит тигр. Ну и опять же, вполне может статься, что в обеих комнатах находятся принцессы или в них сидит по тигру либо, наконец, в одной комнате пребывает принцесса, а в другой — тигр.

4. Четвёртое испытание. Объявив эти правила следующему узнику, король указал на две новые таблички:

I
*В обеих комнатах
находятся принцессы.*

II
*В обеих комнатах
находятся принцессы.*

Какую из комнат следует выбрать узнику на этот раз?

5. Испытание пятое. Условия те же, а таблички вот какие:

I
*По крайней мере в одной
из комнат находится
принцесса.*

II
*Принцесса —
в другой комнате.*

6. Испытание шестое. Этой задачкой король особенно гордился, равно как и следующей за ней.

I
*Что ни выберешь —
всё едино.*

II
*Принцесса —
в другой комнате.*

Как должен поступить узник?