

30
вариантов

ЕГЭ



2024

В. В. Мирошин

МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ



МОСКВА
2023

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
М64

Мирошин, Владимир Васильевич.
М64 ЕГЭ 2024. Математика. Профильный уровень. Тренировочные варианты : 30 вариантов / В. В. Мирошин. — Москва : Эксмо, 2023. — 168 с. — (ЕГЭ. Тренировочные варианты).

ISBN 978-5-04-174809-8

Издание предназначено для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Пособие включает:

- 30 тренировочных вариантов, соответствующих демоверсии;
- подробные решения нескольких вариантов;
- ответы ко всем заданиям.

Кроме того, приводятся общие решения для наиболее сложных задач.

Издание будет полезно учителям математики, так как даёт возможность эффективно организовать учебный процесс и подготовку к экзамену.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-174809-8

© Мирошин В.В., 2023
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2023

ВВЕДЕНИЕ

*Уважаемые старшеклассники!
Уважаемые учителя!*

Данное пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ по математике.

Сборник содержит тренировочные варианты работ для экзамена профильного уровня, составленные в соответствии с демонстрационным вариантом и спецификацией.

Так как вы избрали экзамен профильного уровня, то ваша цель — поступление в высшее учебное заведение, требующее хорошей математической подготовки. Авторы, обладая большим опытом работы в общеобразовательных учреждениях и подготовки к экзаменам, постарались сделать так, чтобы предложенные варианты не только готовили к ЕГЭ, но и оказывали сильную помощь в подготовке к дополнительным вступительным испытаниям по математике.

В пособии приведено 30 экзаменационных вариантов, из которых несколько имеют подробное решение. Кроме того, авторы старались сделать так, чтобы даже самые простые задания несли информацию, пригодную для подготовки к ЕГЭ. Так как вы планируете продолжать математическое образование, вам потребуется высокий балл для того, чтобы подтвердить хорошее знание математики и свою конкурентоспособность.

Конечно, ваша цель — последние задания, приносящие наибольшее количество баллов. Они снабжены критериями выставления оценок по приведенным решениям. Но это не значит, что задачи 13–19 не могут иметь других решений. Не забывайте про задачи первой части. Очень часто наиболее сильные участники экзамена, стремясь как можно скорее заняться сложными и интересными задачами второй части, допускают обидные ошибки в простых задачах первой части.

Кроме того, для преподавателей школ в пособии приводятся общие решения для некоторых задач, размещенные в приложении.

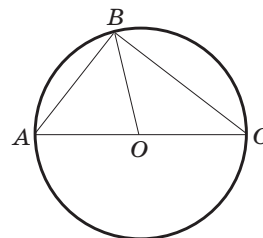
Желаем успеха!

ВАРИАНТ 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Вершины треугольника ABC , вписанного в окружность, делят ее на дуги AB , BC , CA , меры которых относятся как числа $2 : 3 : 5$. Точка O — центр окружности. Найдите меру угла BOC . Ответ укажите в градусах.



Ответ: _____ .

- 2 Плоскость, параллельная основанию прямого кругового конуса, делит его на конус и усеченный конус, боковые поверхности которых относятся как числа $1 : 3$. Найдите, как относится объем усеченного конуса к объему отсеченного конуса.

Ответ: _____ .

- 3 В непрозрачной урне находятся 12 белых и 8 красных шаров. Наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар не будет белым?

Ответ: _____ .

- 4 В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найдите вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами. Ответ округлите до тысячных.

Ответ: _____ .

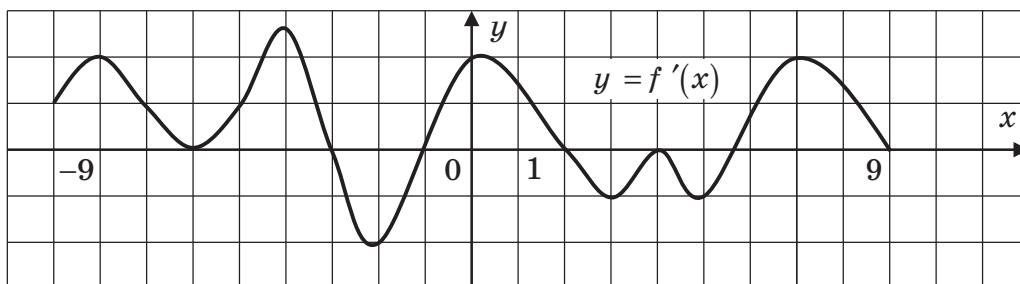
- 5 Найдите корень уравнения $4^{2x-3} = 8$.

Ответ: _____ .

- 6 Найдите значение выражения $\frac{2}{7+4\sqrt{3}} + \frac{2}{7-4\sqrt{3}}$.

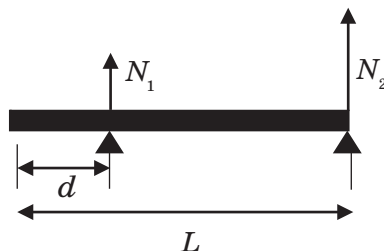
Ответ: _____ .

- 7 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 9)$. Найдите количество точек максимума функции на данном промежутке.



Ответ: _____ .

- 8 Стержень массой $m = 80$ кг длиной $L = 5$ м расположен на двух опорах. Одна опора удалена от первого конца стержня на расстояние d , а вторая находится во втором конце стержня. Сила давления N_1 на первую опору вычисляется по формуле $N_1 = \frac{mg}{2(L-d)}$, $g = 9,8$ м/с². Найдите расстояние d от первого конца стержня до первой опоры, если $N_1 = 98$ Н.

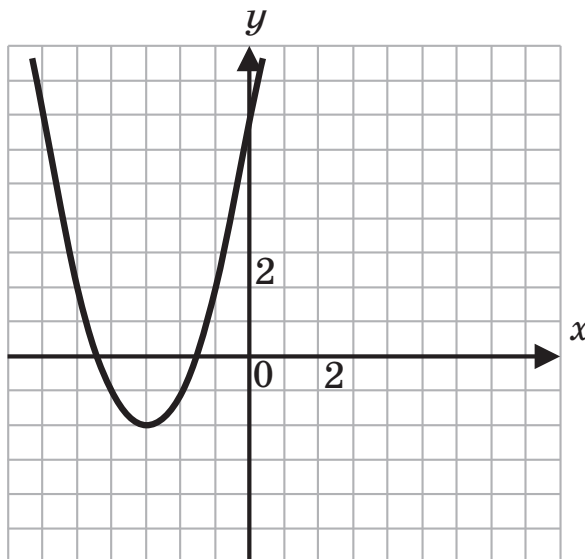


Ответ: _____ .

- 9 Первую половину пути поезд ехал со скоростью 30 км/ч, а вторую половину — в 3 раза быстрее. Определите, с какой постоянной скоростью должен был ехать поезд, чтобы прибыть в пункт назначения в то же самое время? Ответ укажите в км/ч.

Ответ: _____ .

- 10 На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b, c — целые. Найдите значение $f(1)$.



Ответ: _____ .

- 11 Найдите наибольшую абсциссу точки графика функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4$, в которой касательная к графику функции образует с осью абсцисс угол 45° .

Ответ: _____ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

12 Решите уравнение $2\cos 3x + 6\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

13 Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Плоскость сечения проведена через сторону AB , середину M бокового ребра SC и точку N , принадлежащую ребру SD .

- а) Докажите, что сечение $ABMN$ — трапеция.
 б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

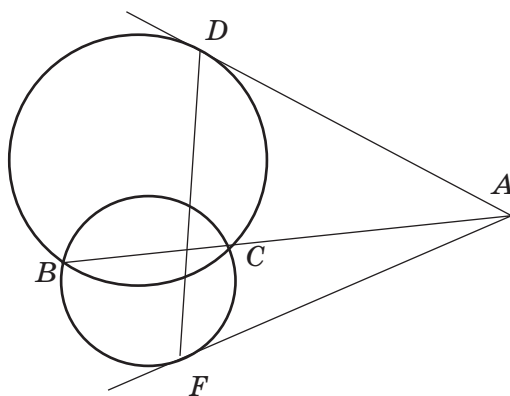
14 Решите неравенство $\lg x - \frac{1}{2}\log_{0,1}(5x-4) \geq \sqrt{\frac{4\lg^2 x + \lg^2(5x-4)}{2}}$.

15 На собрании акционеров было решено увеличить прибыль предприятия за счет расширения ассортимента продукции. Экономический анализ показал, что:

- 1) дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, окажутся равными 64 000 рублей в год;
- 2) дополнительные расходы при освоении одного нового вида составляют 7000 рублей в год, а освоение каждого последующего вида потребует на 8000 рублей в год больше расходов, чем освоение предыдущего.

Найдите значение максимально возможного прироста прибыли. Ответ укажите в тысячах рублей.

16 BC — общая хорда двух пересекающихся окружностей. На прямой BC выбрана точка A , и из этой точки к окружностям проведены касательные AD и AF , угол между которыми равен $\frac{\pi}{6}$.



- а) Докажите, что $\triangle DAF$ равнобедренный.
 б) Найдите площадь $\triangle DAF$, если точка C делит отрезок AB на отрезки $AC = 12$, $CB = 4$.

17 На координатной плоскости рассматривается множество точек $M(a; b)$, координаты которых таковы, что система
$$\begin{cases} ax + by = 2, \\ (a-4)x + (b+4)y = 3, \\ (b+4)x - (a+6)y = 3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение. Найдите площадь фигуры F , ограниченной множеством M .

18

Два двузначных числа записаны друг за другом. Оказалось, что полученное четырехзначное число делится на произведение исходных чисел.

- а) Может ли частное четырехзначного числа и произведения исходных чисел быть равным 3?
- б) Докажите, что отношение четырехзначного числа к произведению исходных чисел не может быть больше 11.
- в) Найдите наибольшее отношение четырехзначного числа к произведению исходных чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 2

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь треугольника ABC равна 24. KL — средняя линия треугольника, параллельная стороне BC . Найдите площадь треугольника BKL .

Ответ: _____ .

2 Площадь поверхности первого шара равна 43. Найдите площадь поверхности второго шара, объем которого в 27 раз больше объема первого шара.

Ответ: _____ .

3 Из непрозрачной урны, в которой содержатся 10 белых, 8 красных и 2 зеленых шара, наугад извлекают один из них. Какова вероятность того, что это будет либо белый, либо красный шар?

Ответ: _____ .

4 Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найдите вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответ: _____ .

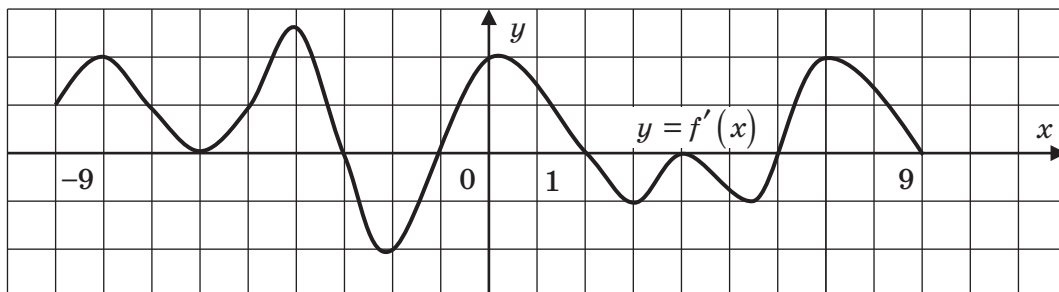
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-1}=13$.

Ответ: _____ .

6 Найдите значение выражения $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,25$.

Ответ: _____ .

7 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 9)$. Найдите количество точек минимума функции на данном промежутке.



Ответ: _____ .

8

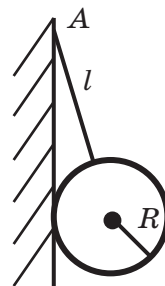
К вертикальной гладкой стенке в точке A на веревке длиной l подвешен шар с радиусом R . Сила натяжения веревки вычисляется по формуле

$$T = \frac{mg(l+R)}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}.$$

Найдите массу шара, если $l = 4$ м, $R = 6$ м, $g = 9,8$ м/с²,

$$T = 490 \text{ Н.}$$

Ответ: _____ .



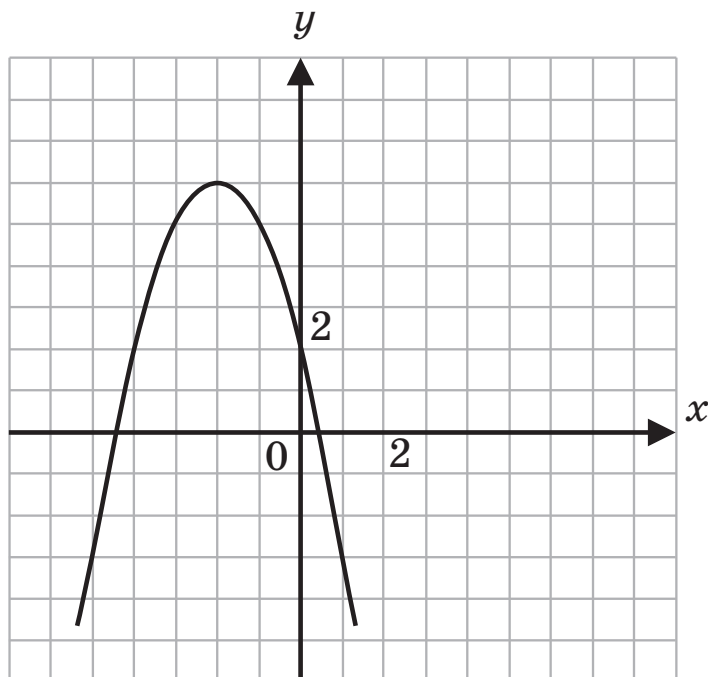
9

Имеются два сплава золота и серебра, в первом из которых массы металлов относятся как 1 : 2, а во втором как 3 : 4. Сколько граммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 57 г нового сплава, в котором массы золота и серебра относятся как 7 : 12? В ответе укажите массу первого сплава.

Ответ: _____ .

10

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b, c — целые. Найдите значение $f(1)$.



Ответ: _____ .

11

Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 14x - 45 - x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен 4.

Ответ: _____ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

12 Решите уравнение $\cos 2x - (2 - \sqrt{3}) \cos -\sqrt{3} + 1 = 0$.

- 13 В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = 2$, $BC = 3$, $BD = 4$, $AD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$.
- а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости (ABC) .
- б) Найдите длину ребра AC , если объем пирамиды $ABCD$ наибольший возможный.

14 Решите неравенство $\frac{2}{\log_x 2 + \log_{5x-8} 2} \geq \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2 (5x-8)}$.

- 15 Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 до 20 рублей, а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 и не больше 60 рублей.

Какой процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете?

- 16 Окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются в точках A и P . Через точку A проведена касательная AB к окружности Ω_1 , а через точку P — прямая, параллельная AB (точки B и C лежат на Ω_2 , точка D — на Ω_1).

- а) Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.
- б) Найдите острый угол ABC параллелограмма $ABCD$, если $AP = 2\sqrt{3}$, $R_1 = 2$, где R_1 — радиус окружности Ω_1 .

- 17 Найдите наибольшее значение параметра k , при котором система $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y \leq 2k - 2, \\ x + y + z = k \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

- 18 Задана рациональная дробь вида $\frac{5l+6}{8l+7}$, где l — целое число.

- а) Найдите все целые числа, на которые может быть сокращена дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$.
- б) Найдите все целые числа, при каждом из которых дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ сократима. Укажите наименьшее натуральное такое число.
- в) Докажите, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$, $cl+d \neq 0$, $a, b, c, d, l \in \mathbb{Z}$ сократима на число $k \in \mathbb{Z}$, то $ad - bc$ также делится на $k \in \mathbb{Z}$.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 3

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В ромбе $ABCD$ мера угла BAF , смежного с внутренним углом BAD , равна 114° . Найдите меру угла ADB .

Ответ: _____ .

2 Площадь полной поверхности прямого кругового цилиндра равна 156. Найдите площадь поверхности второго цилиндра, радиус основания и высота которого в 2 раза меньше.

Ответ: _____ .

3 Из непрозрачной урны, в которой содержатся 9 белых, 8 красных и 3 зеленых шара, случайно выпал один шар. Какова вероятность того, что это не будет ни белый, ни зеленый шар?

Ответ: _____ .

4 Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найдите вероятность того, что за время t безотказно будет работать только один элемент.

Ответ: _____ .

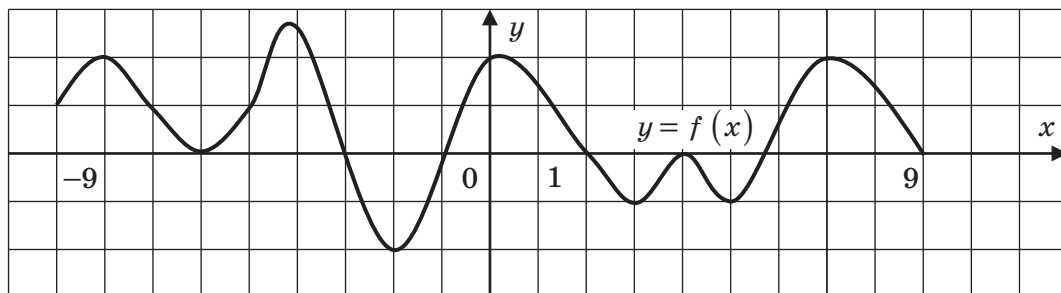
5 Найдите корень уравнения $\log_5(10x+12)=3$.

Ответ: _____ .

6 Найдите значение выражения $\log_3^4\left(\frac{1}{9}\right)$.

Ответ: _____ .

7 На рисунке изображен график функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале $(-9; 9)$. Найдите количество точек минимума функции на данном промежутке.

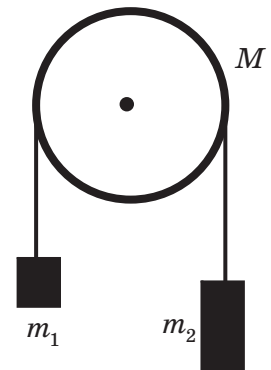


Ответ: _____ .

8

Два груза массой m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) соединены между собой невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, вся масса M которого сосредоточена в его ободе и который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. Ускорение грузов можно найти по формуле $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M}g$, где $g = 9,8$ м/с². Найдите массу обода, если $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 8$ кг, $a = 4,9$ м/с².

Ответ: _____ .



9

К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего концентрация соли в растворе уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор?

Ответ: _____ .

10

Функция $f(x)$ — четная и определена на всей числовой оси. Известно, что $\begin{cases} x \geq 0, \\ f(x) = 3x^2 - 2x + 1. \end{cases}$ Найдите $f(-3)$.

Ответ: _____ .

11

Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 5 + 6t - \frac{1}{3}t^3$, где путь $S(t)$ измеряется в метрах, а время t — в секундах. Найдите скорость точки в момент $t = 1$ с. Ответ укажите в м/с.

Ответ: _____ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

12

Решите уравнение $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$.

13

В пирамиде $ABCD$ медиана BM , проведенная к стороне AD треугольника ABD , равна половине AD , а медиана BN , проведенная к стороне CD треугольника BDC , равна половине CD .

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости (ABC) .

б) Найдите объем пирамиды $BACNM$, если объем пирамиды $ABCD$ равен 16.

14

Решите неравенство $\left| \frac{(x-3)\sqrt{5-x} + (x+2)(x+1)}{x-3} \right| \geq \sqrt{5-x} + \left| \frac{(x+2)(x+1)}{x-3} \right|$.

15 У школьника было некоторое количество марок, ему подарили альбом для них. Если он наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома, а если он наклеит по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него будет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

16 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка KM , соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка LN , соединяющего середины сторон AB и CD .

- а) Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.
 б) Найдите величину угла, образованного продолжением сторон AD и BC .

17 Решите систему
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2| = 2\sqrt{5}, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

18 а) Числа 1, 2, 3, ..., 49 расположены в квадратной таблице.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
.....						
43	44	45	46	47	48	49

- Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычеркиваются строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей, состоящей из 36 чисел, и т.д., всего 7 раз. Найдите сумму выписанных чисел.
 б) Квадратная таблица из 49 клеток заполнена числами от 1 до 7 так, что в каждом столбце и каждой строке встречаются все эти числа. Докажите, что если таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встретятся все числа от 1 до 7.
 в) Числа 1, 2, 3, ..., k^2 расположены в квадратной таблице.

1	2	3	k
$k + 1$	$k + 2$	$k + 3$	$2k$
.....				
$(k - 1)k + 1$	$(k - 1)k + 2$	$(k - 1)k + 3$	k^2

Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычеркиваются строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей из $(k - 1)^2$ чисел и т.д., всего k раз. Найдите сумму выписанных чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 4

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Угол между высотами BK и BL параллелограмма $ABCD$, проведенными соответственно к сторонам AD и CD параллелограмма, равен 40° . Найдите величину угла BAD . Ответ укажите в градусах.

Ответ: _____ .

2 В треугольной пирамиде $SABC$ через точки K и L , где BK и AL — медианы основания пирамиды, проведена плоскость (KLM) , параллельная плоскости грани (SAB) . Найдите отношение объема пирамиды $CMKL$ к объему пирамиды $SABC$.

Ответ: _____ .

3 Готовясь к докладу, ученик хотел выписать нужную цитату, но забыл номер страницы. Он помнил, что этот номер выражался двузначным числом, цифры которого были различны. Какова вероятность того, что ученик найдет цитату, открыв первую из таких страниц? Ответ округлите до тысячных.

Ответ: _____ .

4 Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна $0,38$. Найдите вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна $0,8$.

Ответ: _____ .

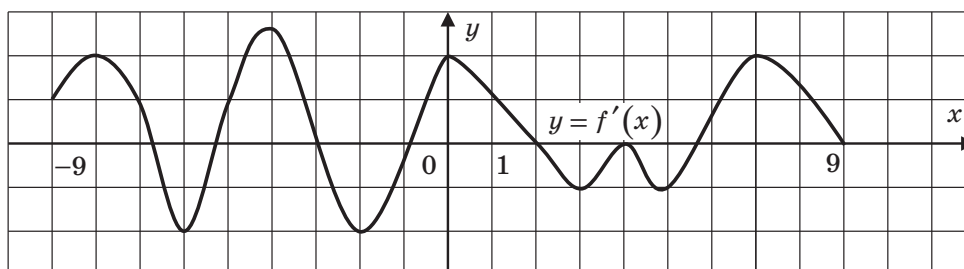
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{9-x+x^2} = x+2$. Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наибольший из них.

Ответ: _____ .

6 Найдите значение выражения $7^{\log_7 25}$.

Ответ: _____ .

7 На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале $(-9; 9)$. Найдите количество точек графика функции, в которых касательная к графику параллельна или совпадает с прямой $y = 2x - 3$ на данном промежутке.



Ответ: _____ .