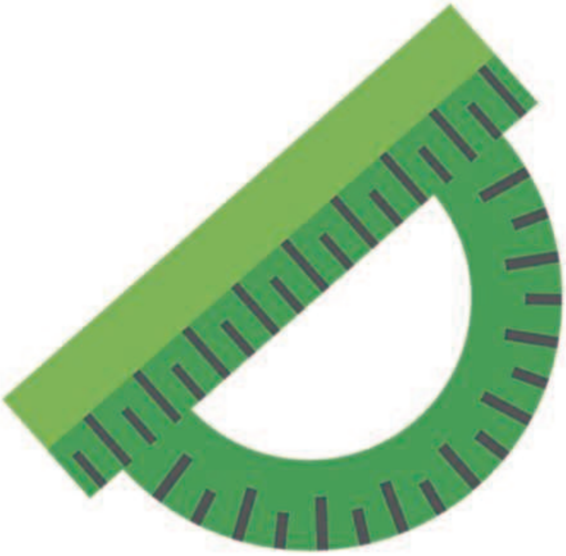
И. Е. Гусев

УВЛЕКАТЕЛЬНАЯ НАУКА

МАТЕМАТИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО
АСТ

УДК 087.5:51
ББК 22.1
Г96

Серия «Увлекательная наука» основана в 2016 году

Гусев, Игорь Евгеньевич.

Г96 Математика / И. Е. Гусев. — Москва : Издательство АСТ, 2017. — 160 с. : ил. — (Увлекательная наука).

ISBN 978-5-17-100548-1.

Вы уже много лет изучаете математику, но все еще пасуете перед многоэтажными формулами и сложными теоремами? А может, вам, наоборот, нравится во всем находить математические закономерности и пробовать свои силы в решении задач, над которыми ломали головы лучшие математики мира? При любом из этих вариантов наша книга создана именно для вас! Двигаясь от простого к сложному, от первых идей Пифагора к математическому анализу, вы без труда разберетесь в правилах и законах математики, узнаете, как известные ученые делали свои великие открытия, а также научитесь решать необычные задачи, которые требуют не только знаний, но и смекалки. А самое главное — эта книга написана просто и интересно. В отличие от школьных учебников, здесь нет бесконечных формул и сухих научных теорий — только понятные объяснения, аналогии, сравнения и красочные иллюстрации.

Для среднего школьного возраста.

УДК 087.5:51
ББК 22.1

© Оформление, обложка, иллюстрации ООО «Интеджер», 2017.

© ООО «Издательство АСТ», 2017

© В оформлении использованы материалы, предоставленные Фотобанком Shutterstock, Inc., Shutterstock.com, 2017

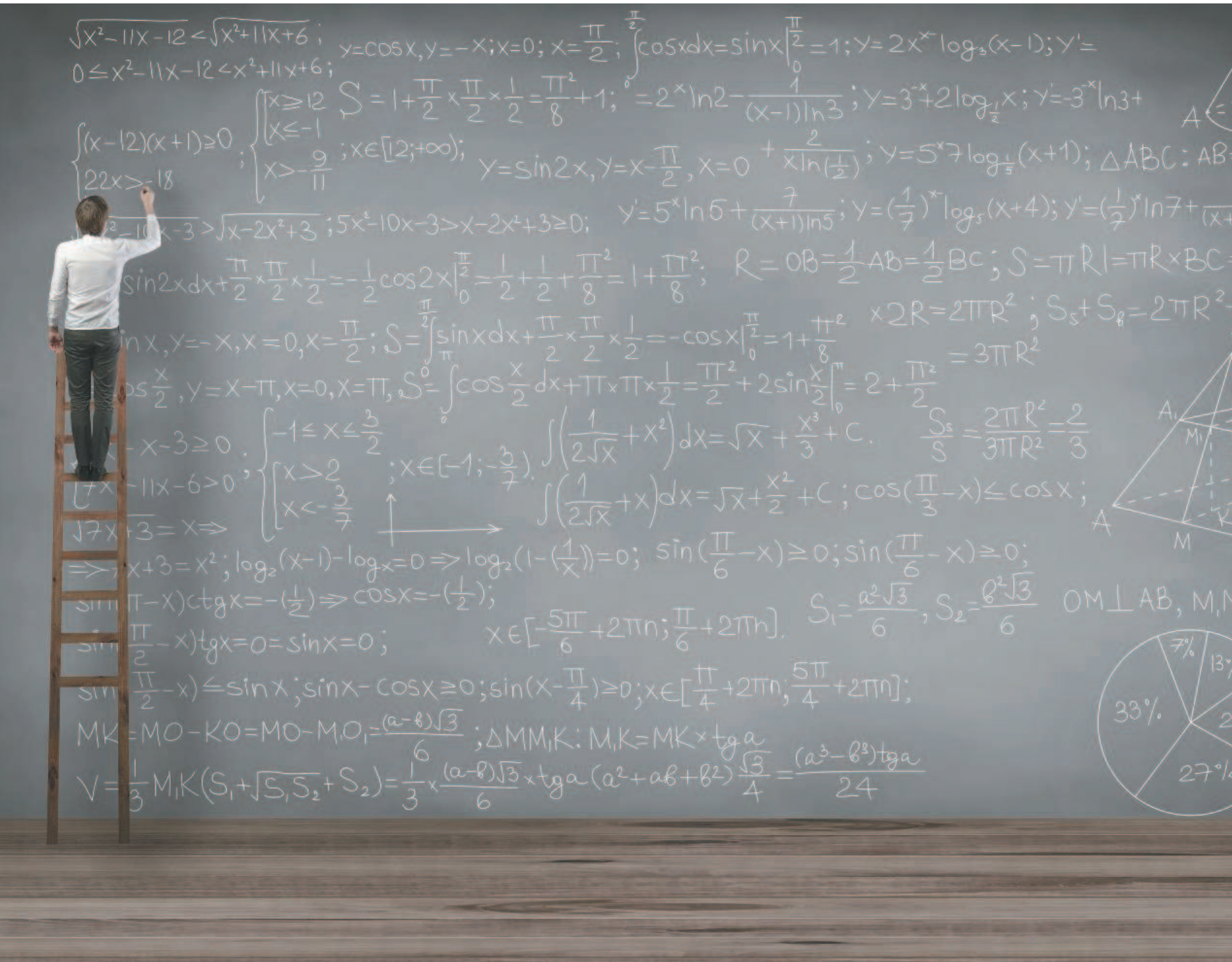
© В оформлении использованы материалы, предоставленные Фотобанком Dreamstime, Inc., Dreamstime.com, 2017

ISBN 978-5-17-100548-1

ВООБРАЖАЕМЫЕ УЗОРЫ

Математик, как и художник и поэт, создает узоры. И если его узоры долговечнее, то это потому что они сотканы из идей.
Г. Харди, английский математик

Эта книга о царице наук — математике. Она приводит в трепет некоторых своих «подданных», особенно в средней школе. Но и щедро одаряет своими несметными богатствами преданных ей. Или хотя бы почитающих ее. Этого достаточно, чтобы понять то, о чем говорится в данной книге. Ну, еще желательно помнить хотя бы простейшие вещи из школьного курса. Мы пойдем тропинками, ведущими от него к самой современной математике: векторным пространствам, неевклидовой геометрии, топологии, симметриям, группам и многому другому. Попутно познакомимся с разделами современной физики, в возникновении которых математика сыграла решающую роль, например общей теорией относительности, а также некоторыми физическими терминами — кварками, суперструнами.



МЕРА ВСЕХ ВЕЩЕЙ

Господь сотворил целые числа, а все остальное — дело рук человека.
Л. Кронекер, немецкий математик

Возникновение математики

Математика, в широком смысле слова понимаемая как всевозможное использование чисел и геометрических фигур, возникла несколько тысячелетий назад. Она создавалась усилиями многих цивилизаций, ныне исчезнувших. Наиболее значимыми среди них были Вавилон и Древний Египет. Правда, там математика так и не сформировалась в отдельную науку. Она не ставила перед собой исследовательских целей, а занималась решением практических задач. Математика была своего рода инструментом, набором разрозненных простых правил, позволявших людям решать насущные проблемы: составлять календари, определять сроки проведения сельскохозяйственных работ, вести торговлю.

Все началось с греков

Афинская школа. Рафаэль Санти. 1511 г.

Математика как полноценная наука и средство познания природы — творение древних греков. Неизвестно, что заставило их прийти к новому пониманию математики и ее роли, — не сохранилось описывающих этот процесс документов тех времен. Приходится полагаться лишь на более или менее правдоподобные догадки историков.

Как бы то ни было, у греков начиная с VI в. до н.э. сложилось о мире определенное представление, в котором важная роль отводилась математическим понятиям. Считалось, что природа устроена разумно, все события в ней протекают по точному и неизменному плану, который является математическим. Греки верили в силу разума, и потому были убеждены, что если эту силу приложить к изучению природы, то лежащий в основе мироздания математический план удастся разгадать.

«Команда» Пифагора

Итак, план, по которому построена Вселенная, имеет математический характер. Отсюда следует, что только математика позволит человеку раскрыть этот план. Понятно, что вслед за рождением такой идеи стали появляться варианты, или модели, устройства мира.

Первой предложила свой вариант «математизированного плана» строения Вселенной группа мудрецов, созданная Пифагором Самосским (жил в 570 — около 490 гг. до н.э.). Эти ученые, так называемые пифагорейцы, жили на юге Италии в городе Кротон, хоть сами были греками.

Пифагорейцев поразило, что весьма различные в качественном отношении явления обладают одинаковыми математическими свойствами. Значит, решили мудрецы, именно математические свойства выражают сущность явлений. Если говорить более точно, то пифагорейцы видели сущность явлений в числе и числовых отношениях. В этих объяснениях природы числу отводилась роль начала начал. Пифагор находил таинственный смысл в числах и фигурах, говорил, что «число составляет сущность вещей; сущность предмета — число его».

Пифагорейцы считали, что все тела состоят из фундаментальных частиц, «единиц бытия», которые в тех или иных комбинациях соответствуют различным геометрическим фигурам. В сумме эти единицы представляют собой материальный объект. Число считалось материей и формой Вселенной. Отсюда и основной тезис учения пифагорейцев: «Все вещи суть числа». А поскольку число выражало сущность всего, то объяснять явления следовало только с помощью чисел.

Пифагор. Фрагмент фрески Рафаэля Санти «Афинская школа». 1511 г.

Пифагорейцы представляли числа наглядно в виде множеств точек (возможно, символизировавших частицы), расположенных в виде фигур, которые могли представлять реальные объекты.

Например, множества и  назывались соответственно треугольными и квадратными числами и вполне могли обозначать (изображать) треугольные и квадратные объекты. Позже пифагорейцы развили и усовершенствовали свое учение и начали воспринимать числа как абстрактные понятия, а физические объекты — как их конкретные реализации.

ЧИСЛО И МУЗЫКА

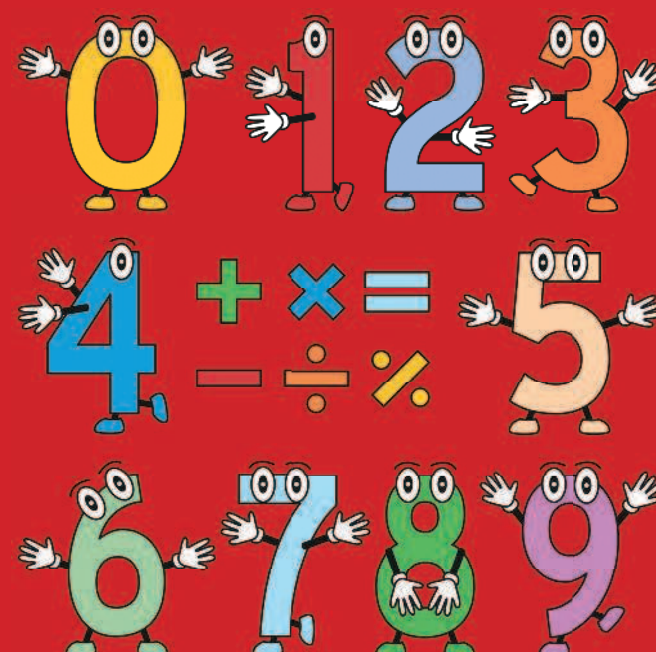
Пифагорейцам принадлежит идея сведения музыкальных интервалов к простым соотношениям между числами; они пришли к этой мысли, совершив два открытия. Первое — что высота звука, издаваемого колеблющейся струной, зависит от ее длины, второе — что гармонические созвучия издают струны, длины которых относятся между собой как некоторые целые числа. Например, гармоническое созвучие возникает, если заставить колебаться две одинаково натянутые струны, одна из которых вдвое длиннее другой. Музыкальный интервал между тонами, издаваемыми такими струнами, ныне называется октавой. Другое гармоническое созвучие создают две струны, длины которых относятся как три к двум: в этом случае тон, издаваемый более короткой струной, на квинту выше тона более длинной. Длины любых двух струн, рождающих гармоническое созвучие, действительно относятся между собой как целые числа.

Пифагор изучает законы музыкальной гармонии. Со средневековой гравюры.

Небесные тела и математика

Движения планет пифагорейцы также свели к числовым отношениям. Планеты не блуждают хаотично среди звезд, как считалось ранее, а перемещаются по устойчивым постоянным путям — окружностям. Круговые движения небесных тел свидетельствуют, что эти тела также подчиняются законам математики. Кроме того, пифагорейцы считали, что тела, двигаясь в пространстве, издают звуки. Им было известно, что звуки — это результат движения, точнее, колебания звучащего тела. Пифагореец по имени Архит обнаружил, что высота тона (частота звука) прямо пропорциональна скорости движения тела и обратно пропорциональна его длине.

ЕСТЬ ТОЛЬКО ЧИСЛА...



Числа, по понятиям пифагорейцев, символизировали все на свете. Например, 1 обозначает точку, 2 — линию, 3 — геометрическую фигуру, 4 — геометрическое тело, 5 — характеристики физических тел, в частности цвет, 6 — жизнь, 7 — душу, 8 — любовь, 9 — справедливость, 10 — совершенство Вселенной.

Пифагорейцы решили, что это открытие является частным случаем общего правила движения, которое распространяется не только на звучащие, но и на видимые тела. По их мнению, планеты движутся тем быстрее, чем дальше они находятся от Земли. Звуки, издаваемые планетами, изменяются в зависимости от удаления от Земли и образуют гармоническое созвучие. Эта «музыка сфер», подобно всякой гармонии, сводится к числовым отношениям, поэтому к ним же сводятся и движения планет.

Платон и его школа

Самой влиятельной после пифагорейцев группой мыслителей, расширившей и распространившей учение о математическом плане, лежащем в основе природы, были платоники, возглавляемые, как о том говорит название школы, Платоном Афинским (427—347 гг. до н.э.). Он был ведущей фигурой духовной жизни Греции. Платон основал в Афинах Академию — центр, который привлек к себе многих интеллектуалов того времени и существовал в течение девяти столетий.

Академия Платона. Мозаика из города Помпеи.

Платон. Фрагмент фрески Рафаэля Санти «Афинская школа». 1511 г. Этот образ художник писал с Леонардо да Винчи.

Платон утверждал, что реальность и разумное устройство физического мира могут быть постигнуты только с помощью математики идеального мира. То, что идеальный мир устроен на математических началах, не вызывало у мудреца сомнений. Платон говорил: «Бог всегда является геометром». В математике геометром был сам ученый, а потому о его математических достижениях мы больше поговорим в главе, посвященной геометрии.

Здесь же только упомянем о том, что математические законы платоники считали вечными и неизменными, а не только сущностью реальности. Кажется, в этом они были правы!

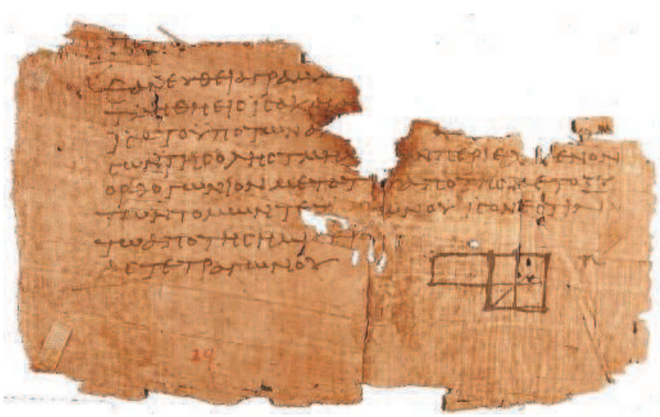
Есть начало — нет конца

Первое известное нам логически последовательное изложение основ математики содержится в трудах знаменитого Евклида. Он написал несколько сочинений. Из дошедших до нас наиболее знамениты «Начала», состоящие из 15 книг (сам Евклид написал 13 книг «Начал», позже к ним прибавились еще две, принадлежащие другим авторам). Все эти сочинения построены по единой логической схеме. Каждая из книг начинается определением понятий (точка, линия, плоскость, фигура и т.д.), которые в ней используются, а затем на основе небольшого числа основных положений (5 аксиом и 5 постулатов), принимаемых без доказательств, строится вся система соответствующих разделов математики.

АЛЕКСАНДР И АЛЕКСАНДРИЯ

Памятник Александру Македонскому на его родине — в Македонии.

В ходе своих грандиозных завоеваний Александр Македонский (356—323 гг. до н.э.) основал в Египте новый город и назвал его Александрией. Именно там Евклид написал свои «Начала». Ему также принадлежат сочинения по механике, оптике и музыке, в которых основная роль отведена математике. Последняя рассматривалась как идеальная основа реального мира. Ряд теорем Евклида стали новым знанием о свойствах геометрических фигур и целых чисел.



Фрагмент «Начал» Евклида, найденный в древнеегипетском городе Оксиринх.

ЕВКЛИД

Евклид. Фрагмент фрески Рафаэля Санти «Афинская школа». 1511 г.

Евклид (365—300 гг. до н.э.) — древнегреческий математик. Работал в Александрии в IV в. до н.э., в эпоху царствования Птолемея I. Однажды Птолемей решил изучить геометрию. Но оказалось, что сделать это не так-то просто. Тогда повелитель призвал Евклида и попросил указать ему легкий путь к математике. «К геометрии нет царской дороги»,— ответил ученый.
Евклид основал в Александрии математическую школу и написал в 325 г. до н.э. главный свой труд по геометрии под общим названием «Начала».

VII, VIII и IX книги «Начал» Евклида содержат сведения о числах. А точнее, они посвящены теории целых и рациональных чисел. В одном из этих томов автор приводит, например, такие определения: »Единица есть то, через что каждое из существующих считается единым; число же — это множество, составленное из единиц».

Древние греки ввели также отношения целых чисел, которые позже получили название дробей.

Натуральные числа

Из всех видов чисел важнейшими Пифагор считал натуральные. «Натуральные» буквально означает «естественные». Для людей далекого прошлого такие числа были естественными, потому что использовались для счета предметов, животных или, допустим, звезд. Числа записывались в виде черточек-зарубок на деревьях либо костях. Со временем начали применять особые знаки — цифры — для записи групп таких черточек. Например, в Древнем Египте число 10 обозначалось иероглифом ∩.

Современные цифры — 0, 1, 2, …, 8 и 9 — были придуманы полторы тысячи лет назад в Индии и завезены в Европу арабами. Поэтому их прозвали арабскими. С помощью цифр можно записать любое натуральное число. Способы записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций, называются системами счисления. В настоящее время наиболее употребимой является позиционная десятичная система счисления: для записи любого числа используются 10 цифр — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; при этом значение каждой цифры определяется ее местом в записи числа.

Множество всех натуральных чисел часто обозначается как N.

Операции с натуральными числами

Какие «блюда» можно приготовить из таких чисел? Прежде всего, построить в ряд согласно величине каждого, как школьников на уроке физкультуры по росту. Получаем:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 8, 9, 10, 11, \ldots$$

(0 не считается натуральным числом). Эта последовательность называется натуральным рядом. Очевидно (это слово математики не любят), что он не имеет конца. В самом деле, как только мы доходим до некоторого числа n, вслед за ним сейчас же можно написать ближайшее к нему натуральное число $n + 1$. В таком случае говорят, что этих чисел существует бесконечное множество.

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Существует любопытнейшая конструкция из натуральных чисел — треугольник Паскаля. Он образован рядами чисел, расположенных сверху вниз. Количество чисел в каждом ряду на одно больше, чем в вышележащем. Каждое число, кроме боковых, равно сумме двух над ним расположенных (3 = 2 + 1, 10 = 4 + 6).

Пойдем дальше. Над натуральными числами можно проводить две основные операции: сложение и умножение. Отметим, что эти операции применяются и ко многим другим математическим объектам. Правда, их смысл может отличаться от привычного нам. Впрочем, к этому мы еще не раз обратимся в дальнейшем. А пока вернемся к натуральным числам.

Итак, сложение. Если a и b — два натуральных числа, то их сумма обозначается как $a + b$. Древние люди научились складывать числа раньше, чем проводить с ними другие операции. Если вспомним, что первоначально они определяли число количеством черточек, то поймем, что порядок сложения не влияет на сумму. Поэтому

$$a + b = b + a. \qquad (1)$$

Это свойство называется коммутативным (переместительным) законом сложения.

Другое свойство этой операции

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad (2)$$

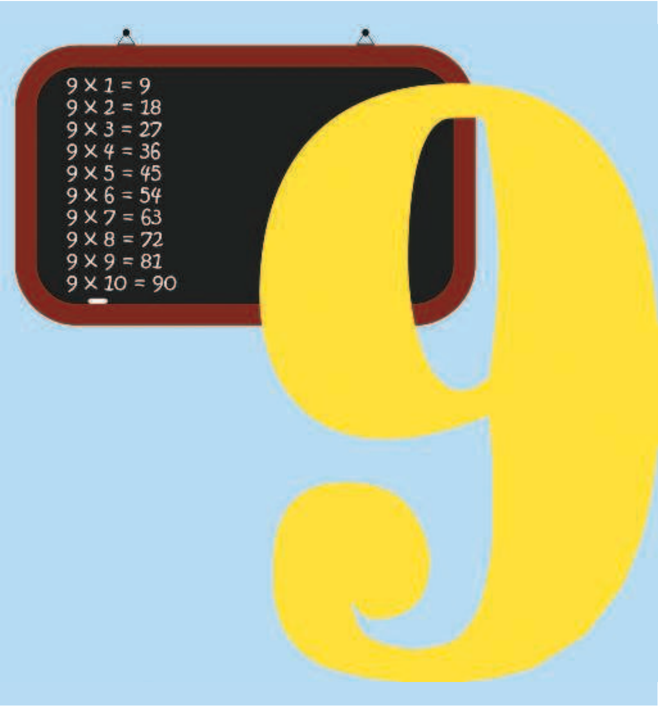
именуется ассоциативным (сочетательным) законом сложения.

Умножение люди освоили гораздо позже. Оно означает сопоставление двум числам a и b (называемым сомножителями) третьего числа c (называемого произведением):

$$ab = c.$$

Иными словами, произведением натуральных чисел a и b считается число c, равное сумме b слагаемых, каждое из которых равно a. То есть произведение определяется через сложение.

Результат умножения числа на самого себя $a \cdot a$ обозначается как a^2 и называется квадратом числа a. Произведение из k одинаковых сомножителей $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ пишут в виде a^k и называют k-й степенью числа a. Само натуральное число k называется показателем степени.



ЗАДАНИЕ 1

Попробуйте найти все натуральные числа, которые больше своей последней цифры в 5 раз.
Подсказка: **подумайте, чему может быть равна последняя цифра искомого числа.**

Произведение также подчиняется определенным правилам:

$$ab = ba, \qquad (3)$$

$$a(bc) = (ab)c. \qquad (4)$$

Первое называется коммутативным законом умножения, второе — ассоциативным законом умножения.

ЗАДАНИЕ 2

Упростите выражение $a^5a^{-3}a^2/a^3a^{-4}a^{-1}$.

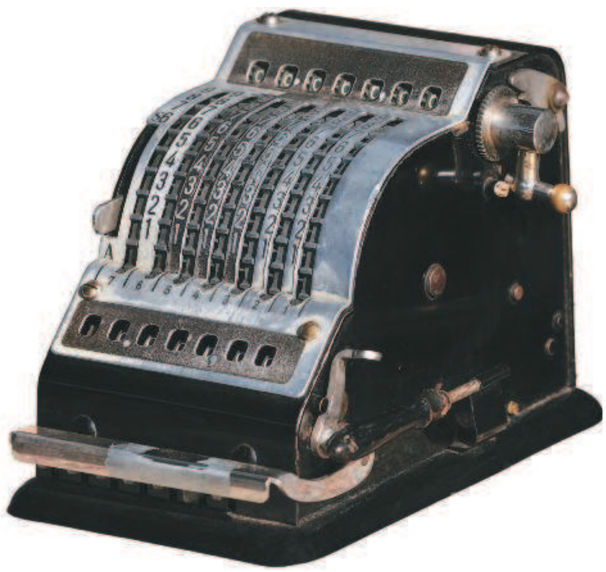
Наконец, последний — пятый — закон натуральных чисел устанавливает правила сочетания первых двух операций:

$$a(b + c) = ab + bc. \qquad (5)$$

Он называется дистрибутивным (распределительным) законом и говорит нам, что при умножении суммы на некоторое целое число можно умножить на это число каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

ЗАДАНИЕ 3

Попытайтесь выразить число 1000 восемью одинаковыми цифрами. Кроме цифр разрешается пользоваться также знаками действий.



Механический калькулятор 1950-х гг. Германия.

Зачем делить числа на группы

В математике изучается большое количество объектов самой разной природы и свойств: числа, функции, уравнения и другие. Назовем группы объектов одной природы категориями (или классами). Натуральные числа — простейшая из математических категорий. Но уже для них устанавливаются определенные правила, с тем чтобы с ними можно было работать. Так вот, любая категория, то есть объекты одинаковой математической природы, определяется через задание свойств операций, которые над ее объектами производятся. Пока это утверждение звучит туманно, но в дальнейшем мы встретимся со многими как знакомыми, так и «экзотическими» представителями математического «зоопарка», и сказанное станет ясным.

Поясним. Есть такие любопытные штуки — матрицы. Это таблички, имеющие строки и столбцы. У них, как и у чисел, имеется операция сложения. Однако уже на этом этапе возникают ограничения. В отличие от чисел, складывать друг с другом можно не любые две матрицы, а лишь те, у которых равное количество строк и равное количество столбцов. Матрицы также можно перемножать по определенному правилу. Но опять же выборочно, при условии, что количество столбцов одной матрицы-сомножителя равно количеству строк второй матрицы-сомножителя. Наконец, при соблюдении этого условия для матриц A и B в общем случае $AB \neq BA$ (хотя бывают и исключения). Вот такая странная «арифметика».

Что еще можно «выжать» полезного из N

Натуральные числа естественно сравнивать между собой. Ведь мы постоянно сравниваем то, что имеем, с тем, что есть у других (то есть чего не имеем). Если у вас 10 рублей, а у друга 12, то этот факт выражается в виде $10 < 12$ или $12 > 10$. Это — неравенства. В общем случае пишут $a < b$ (a меньше, чем b) и $b > a$ (b больше a). На основе последнего неравенства вводится операция вычитания:

$$c = b - a.$$

Число c зовется разностью чисел b и a.

Если допустить, что $b = a$, то $c = 0$. Это особое число: натуральные числа не считают его своим, но обойтись без его символа не могут (10, 30, 1000…). У него имеются две особенности (даже три, но о третьей позже): для любого натурального числа a

$$a + 0 = a;\ a \cdot 0 = 0.$$

Современный калькулятор.

Деление и делимость

Следующая операция над натуральными числами — деление. Это нахождение одного из сомножителей по произведению и другому сомножителю. Исходное произведение называется делимым, данный сомножитель — делителем, результат — частным.

Деление можно записывать по-разному:

$$a : b, \text{ или } \frac{a}{b}, \text{ или } a/b.$$

Говорят, что целое число a делится на целое $b \neq 0$, если частное a/b является целым, т.е. существует такое целое число c, что $a = bc$. В таком случае число b называется делителем числа a, которое, в свою очередь, считается кратным числу b.

Например, 48 делится на 6, так как $48 = 6 \cdot 8$. Поэтому 6 и 8 — делители числа 48, которое кратно каждому из этих чисел (а также числам 1, 2, 3, 4, 12, 16 и 24 и к тому же самому себе).

Возможность деления a на b можно выразить по-разному:

- число a делится нацело на число b;
- число b является делителем числа a;
- число a кратно числу b, число a является кратным числа b.

Если частное $c = a : b$ не является натуральным числом, то принято говорить, что a не делится (нацело) на b. Натуральные числа, делящиеся на 2, называются четными, все прочие — нечетными.

Число 0 делится на любое число, отличное от нуля.

ЗАДАНИЕ 4

Как разделить 7 яблок между 12 мальчиками, если ни одно яблоко нельзя резать больше, чем на пять частей?

Основные признаки делимости натуральных чисел:

- в том случае если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это же число;
- когда в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число;
- натуральное число делится на 2 лишь в том случае, когда последняя цифра делится на 2;
- натуральное число делится на 5 тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5;
- натуральное число делится на 10 в том случае, если его последняя цифра 0;
- натуральное число, состоящее не менее чем из трех цифр, делится на 4 только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа;
- натуральное число делится на 3 только тогда, когда сумма его цифр делится на 3;
- натуральное число делится на 9 только тогда, когда сумма его цифр делится на 9;
- натуральное число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11 или равна нулю.

ЗАДАНИЕ 5

Напишите какое-нибудь девятизначное число, в котором нет повторяющихся цифр (все цифры разные) и которое делится без остатка на 11.

Простые числа

Среди натуральных чисел особо выделяют те, которые делятся только на себя и на 1. Такие числа называются простыми. Например: 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37… Их бесконечно много. Прочие натуральные числа называют составными. Между этими двумя группами чисел есть связь: каждое составное число может быть разложено на простые множители: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $35 = 5 \cdot 7$; $51 = 3 \cdot 17$. Два числа, не имеющие никаких общих делителей кроме 1, называют взаимно простыми.

Это все простые числа.

Таким образом, простые числа — это своеобразные «кирпичики», или «атомы», из которых построены все натуральные числа. Сколько существует атомов различных типов, можно узнать из таблицы Менделеева. Очевидно, их количество конечно, то есть ограничено. А вот простых чисел существует бесконечное множество. Первое строгое доказательство этого факта дал Евклид.

ЗАДАНИЕ 6

Известно, что $p > 3$ и p — простое число, т.е. оно делится только на единицу и на себя само. Как вы думаете: а) будут ли четными числа $(p + 1)$ и $(p - 1)$? б) будет ли хотя бы одно из них делиться на 3?
Подсказка: **вспомните, что p — простое число, т.е. не делится ни на что кроме единицы и самого себя.**

Как ученые разлагают молекулы на атомы, так и математики любят разлагать натуральные числа на простые сомножители. В этом занятии им удалось установить немало интересных законов.

Во-первых, каждое составное число может быть представлено как произведение простых. Его можно последовательно разлагать на множители до тех пор, пока все они не окажутся простыми, например: $60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Следующее утверждение относится к тем самым великим математическим загадкам, которые просто формулируются, но очень трудно доказываются (или не доказываются вообще).

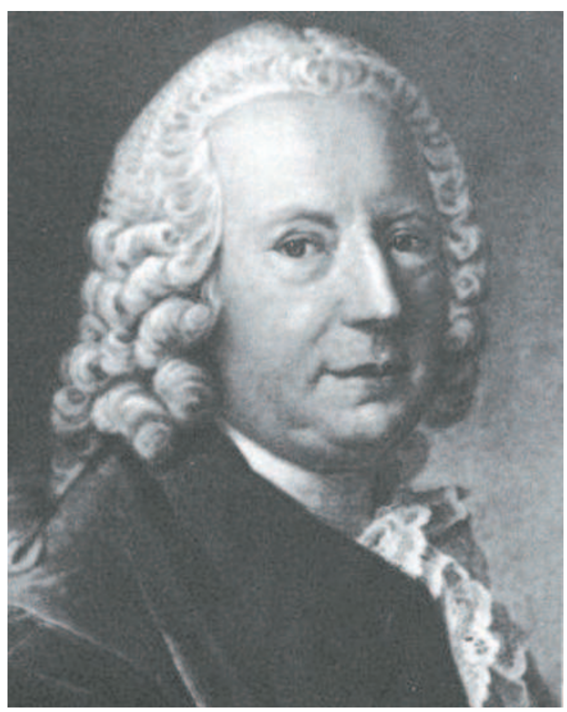
ЗАДАНИЕ 7

Пусть p — простое число. Докажите, что $8p^2 + 1$ — простое число только при $p = 3$.

Проблема Гольдбаха

Формулировка этого утверждения предельно проста. В нем говорится, что каждое четное число больше 2 можно представить как сумму двух простых чисел. Впервые это утверждение выдвинул немецкий математик Христиан Гольдбах в 1742 г. Из него следует, что 10 можно записать в виде суммы $3 + 7$ или $5 + 5$, где 3, 5 и 7 — простые числа. Другая (менее известная) формулировка утверждения Гольдбаха говорит о том, что любое нечетное число, большее или равное 9, можно представить в виде суммы трех простых чисел. Так, $13 = 3 + 3 + 7 = 3 + 5 + 5$.

Первое утверждение называется сильной проблемой Гольдбаха, а второе — слабой проблемой Гольдбаха.



Христиан Гольдбах.

С тех пор как Гольдбах выдвинул эту гипотезу, математики не сомневались, что она верна. Тем не менее никто пока не сумел ее доказать.

ЗАДАНИЕ 8

Дело было в 1932 г. Внуку было тогда ровно столько лет, сколько выражают последние две цифры года его рождения. Когда внук рассказал об этом соотношении деду, тот заявил, что с его возрастом выходит то же самое. Сколько же лет было внуку и деду?

Поиск общей формулы

Не одно столетие математики пытаются найти несложные формулы, которые давали бы только простые числа, хотя бы без требования, чтобы они давали все простые числа. Вот пример — простое и удобное выражение, дающее много простых чисел:

$$f(n) = n^2 - n + 41,$$

где n — натуральное число.

При $n = 1, 2, 3, \ldots, 40$ $f(n)$ есть простое число; но уже при $n = 41$ $f(41) = 41^2$. То есть приведенная формула работает при условии $n \leq 40$.

Еще больший набор простых чисел дает формула

$$n^2 - 79n + 1601$$

до $n = 79$ включительно; при $n = 80$ получается составное число.

Честно говоря, поиски несложных формул, дающих только простые числа, оказались безуспешными. Еще хуже обстоит дело с нахождением такой формулы, которая давала бы только простые числа, притом все их.

ТЕОРЕМА ТАО

В 2012 г. известный специалист по теории чисел Терренс Тао показал, что всякое нечетное число представимо как сумма не более чем пяти простых чисел.

Сравнения по модулю

При рассмотрении делимости целых чисел на некоторое определенное целое число n удобно пользоваться так называемым отношением сравнения, введенным немецким математиком Гауссом.

Говорят, что два целых числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n, если при делении на n они дают одинаковые остатки. Это означает также, что разность $a - b$ делится на n. Так, 27 и 32 сравнимы по модулю 5, поскольку их остаток при делении на это число равен 2. 27 : 5 = 5 (2 в остатке), 32 : 5 = 6 (2 в остатке). При этом 32 – 27 = 5.

Утверждение о сравнимости чисел a и b по модулю n записывают в виде: $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$.

Отношения сравнения обладают рядом свойств.

Пусть $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$, $c \equiv d\ (\mathrm{mod}\ n)$.

Тогда: $a + c \equiv b + d\ (\mathrm{mod}\ n)$,

$$a - c \equiv b - d\ (\mathrm{mod}\ n),$$

$$ac \equiv bd\ (\mathrm{mod}\ n).$$

Таким образом, сравнения по одному и тому же модулю можно складывать, вычитать и умножать.

Пусть $ab \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$ и числа a и n взаимно просты. Тогда $b \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$.

Сложение и умножение по модулю

Теперь поговорим подробнее о том, как проводятся арифметические операции с числами по модулю. Допустим, что имеется последовательность целых чисел от нуля до $n - 1$, где n — некоторое натуральное число:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, n - 2, n - 1\}. \quad (6)$$

Например, если $n = 12$, то наша последовательность совпадает с числами на циферблате часов. Показания значений часа, отличающиеся на 12 (1 и 13, 2 и 14, …, 7 и 19 и т.д.), есть числа, сравнимые по модулю 12 (т.к. 13 – 1 = 14 – 2 = … = 12).

Возвращаясь к случаю произвольного n, сложим любые два числа из множества (6). Если сумма будет больше n, то вычтем из нее это самое n и получим в результате число из того же множества (6). Это и будет сложение по модулю n.

ТЕОРЕМА ЧЕНА

Она утверждает, что всякое достаточно большое четное число представимо либо в виде суммы двух простых чисел, либо в виде суммы простого и полупростого (произведение двух простых) чисел.

Отметим, что на указанном множестве чисел в операции сложения по модулю роль нуля играет само число n. В самом деле, прибавление его к любому из этих чисел приводит к тому же самому (по модулю!) числу (для часов $17 = 5 + 12 = 5 \bmod (12)$).

Любые два числа из последовательности (6) можно перемножить. Разумеется, произведение может «улететь» далеко за пределы этой последовательности. Несмотря на это, среди ее членов всегда найдется число, которое отличается от полученного произведения на число, кратное n.

ЧИСЛА МЕРСЕННА

Так называются числа вида $2^p - 1$, где p — произвольное целое число, называемое показателем. Свое название такие числа получили в честь французского монаха Марена Мерсенна, являвшегося по совместительству математиком. Он наткнулся на эти числа в поисках универсальной формулы, которая позволяла бы перечислять все простые числа. В 1648 г. монах высказал предположение, что числа вида $2^p - 1$ должны быть простыми для показателей 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 и составными для всех остальных целых чисел, не превосходящих 257. В прошлом столетии математики выяснили, что на самом деле список показателей, дающих простые числа Мерсенна и не превосходящих 257, выглядит следующим образом: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 и 127. Это первые 12 простых чисел Мерсенна.

В заключение этого раздела познакомимся еще с одним понятием, встречающимся в теории чисел. Пусть в выражении (6) $n = p$, где p — натуральное простое число. Кроме того, удалим из (6) число 0, тогда наше множество будет состоять из $p - 1$ членов:

$$\{1, 2, 3, \ldots, p-2, p-1\}. \qquad (7)$$

На нем обычным образом вводятся операции сложения и умножения его членов друг с другом по модулю p. Оно имеет специальное название — конечное поле с p элементами. Такие множества играют важную роль в математике (например, при решении сложных алгебраических уравнений).

ЧИСЛО ДЛИННЕЕ «ВОЙНЫ И МИРА»

В 2013 г. математик Кертис Купер обнаружил 48-е простое число Мерсенна. Десятичная запись такого числа состоит из более чем 17 млн знаков. Для сравнения: в романе «Война и мир» Л. Н. Толстого всего около 3,1 млн символов.