

А. П. КИСЕЛЁВ

АЛГЕБРА

6-7 класс



Издательство АСТ

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72
К44

Дизайн переплёта *Алексея Родюшкина*

Киселёв, Андрей Петрович.

К44 Алгебра. 6–7 класс / Андрей Киселёв. — Москва :
Издательство АСТ, 2025. — 224 с. — (Лучшие советские
учебники).

ISBN 978-5-17-174169-3

Настоящая книга — первая часть знаменитого пособия по алгебре для 6-х и 7-х классов от выдающегося учёного, новатора в своей области и законодателя школьной математики А.П. Киселёва, методы которого помогли не одному поколению школьников нашей страны поддерживать достойный уровень подготовки по этой дисциплине.

Его главная задача всегда заключалась в том, чтобы сделать предмет доступным и понятным для обучающихся. Поэтому его книги написаны ясным и простым языком для лёгкости освоения, а сжатость изложения помогает ускорить этот процесс. После прочтения вы узнаете о:

- главных свойствах операций с относительными числами;
- одночленных и многочленных выражениях;
- свойствах и системах уравнений;
- квадратных уравнениях и извлечении квадратного корня и многом другом.

«Алгебра. 6–7 класс» — находка для школьников, а также незаменимый помощник для родителей, педагогов и всех интересующихся математикой, стремящихся расширить свои знания в этой области.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-17-174169-3

© Оформление. ООО «Издательство АСТ», 2025

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

I. Алгебраическое знакоположение

1. **Употребление букв.** а) *Для выражения общих свойств чисел.* Пусть мы желаем кратко выразить в письменной форме, что произведение двух чисел не изменится, если мы поменяем местами множимое и множитель. Тогда, обозначив одно число буквой a , другое буквой b , мы можем написать равенство: $a \times b = b \times a$, или, короче: $ab = ba$, условившись раз навсегда, что если между двумя буквами, написанными рядом, не стоит никакого знака, то это значит, что между ними подразумевается знак умножения. Буквенные обозначения употребляют, если желают выразить, что некоторое свойство принадлежит не каким-нибудь отдельным числам, а всяким числам.

Для обозначения чисел употребляют обыкновенно буквы латинского (или французского) алфавита.

б) Для сокращённого выражения правила, посредством которого можно решить задачи, сходные по условиям, но различающиеся только величиной данных чисел.

Положим, например, мы решаем задачу:

найти 3% числа 520.

Тогда рассуждаем так:

1% какого-нибудь числа составляет $\frac{1}{100}$ этого числа; следовательно:

$$1\% \text{ числа } 520 \text{ составляет } \frac{520}{100} = 5,2;$$

$$3\% \text{ числа } 520 \text{ составляют } \frac{520}{100} \times 3 = 15,6.$$

Решив несколько подобного рода задач, мы замечаем, что для нахождения процентов какого-нибудь числа достаточно разделить это число на 100 и результат умножить на число процентов. Решим задачу в таком общем виде:

найти $p\%$ числа a .

Задачу решим так:

$$1\% \text{ числа } a \text{ составляет } \frac{a}{100},$$

$$p\% \text{ числа } a \text{ составляют } \frac{a}{100} \times p.$$

Обозначив искомое число буквой x , мы можем написать равенство:

$$x = \frac{a}{100} \times p,$$

из которого прямо видно, как можно находить проценты от любого данного числа.

Возьмём ещё пример. В арифметике правило умножения дробей мы выражаем словами так: чтобы умножить дробь на дробь, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение разделить на второе. Применяя буквенные обозначения, мы можем это правило выразить очень коротко. Именно, обозначив для первой дроби числитель через a , знаменатель через b , а для второй дроби соответственно через c и d , мы можем написать:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Нетрудно видеть, что эта запись даёт общее правило умножения для всяких дробей, так как под буквами мы можем подразумевать любые числа.

Точно так же для правила деления дроби на дробь будем иметь запись:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Всякое равенство или неравенство, выражающее посредством букв и знаков действий какое-нибудь соотношение между числами, называется формулой.

Приведём для примера некоторые формулы.

Если основание и высоту прямоугольника измерим одной и той же линейной единицей и для основания получим число b , а для высоты число h , то площадь s этого прямоугольника, выраженная в со-

ответствующих квадратных единицах, определится формулой $s = bh$. При тех же обозначениях для площади треугольника получим формулу:

$$s = \frac{1}{2}bh.$$

Из физики известно, что для определения удельного веса какого-либо вещества надо вес данного количества этого вещества разделить на его объём. Обозначая вес тела (в граммах) через p , объём его (в кубических сантиметрах) через v и удельный вес через d , мы можем приведённое правило для определения удельного веса кратко выразить формулой:

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Алгебраическое выражение. Если несколько чисел, обозначенных буквами (или буквами и цифрами), соединены между собой посредством знаков, указывающих, какие действия и в каком порядке надо произвести над числами, то такое обозначение называется *алгебраическим выражением*.

Таковы, например, выражения: $\frac{a}{100} \times p$; ab ; $2x + 1$.

Для краткости мы часто будем вместо «алгебраическое выражение» говорить просто «выражение».

Вычислить значение какого-нибудь выражения для данных численных значений букв — значит подставить в него на место букв эти численные значения и произвести все указанные в выражении действия: число, получившееся после этого, называется *численной величиной* алгебраического выражения для

данных численных значений букв. Так, численная величина выражения $\frac{a}{100} \times p$ при $p = 3$ и $a = 520$ равна:

$$\frac{520}{100} \times 3 = 5,2 \times 3 = 15,6.$$

3. Действия, рассматриваемые в алгебре, следующие: *сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня*. Что такое первые четыре действия, известно из арифметики. Пятое действие — возведение в степень — представляет собой частный случай умножения, когда перемножаются несколько одинаковых сомножителей. Произведение таких сомножителей называется *степенью*, а число их — *показателем степени*. Возводимое в степень число называется *основанием степени*. Если какое-нибудь число берётся сомножителем 2 раза, то произведение называется *второй степенью*; если какое-нибудь число берётся сомножителем 3 раза, то произведение называется *третьей степенью* этого числа и т. д. Так, вторая степень числа 5 есть произведение 5×5 , т. е. 25; третья степень числа $\frac{1}{2}$ есть произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{1}{8}$. *Первой степенью* числа называют само это число.

Вторая степень называется иначе *квадратом*, а третья степень — *кубом*. Такие названия даны потому, что произведение $a \times a$ выражает (в квадратных единицах) площадь квадрата со стороной в a линейных единиц, а произведение $a \times a \times a$ выражает (в кубических единицах) объём куба с ребром в a линейных единиц.

Об извлечении корня мы пока говорить не будем, так как это действие в начале алгебры не рассматривается.

4. Знаки, употребляемые в алгебре. Для обозначения первых четырёх действий в алгебре употребляются те же знаки, как и в арифметике, только знак умножения, как мы уже говорили, обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или один из них обозначены буквами. Например, вместо $a \times b$ (или вместо $a \cdot b$) пишут просто ab и вместо $3 \times a$ (или $3 \cdot a$) пишут $3a$. В качестве знака деления употребляется, безразлично, или двоеточие «:», или горизонтальная черта; так, выражения $a : b$ и $\frac{a}{b}$ означают одно и то же, а именно, что число a делится на число b .

Возведение в степень принято сокращённо выражать так: пишут число, которое берётся сомножителем (основание степени), а над ним, с правой стороны, ставят другое число (показатель степени), выражающее, сколько раз возводимое число должно быть повторено сомножителем. Так, 3^4 (читается: *три в четвёртой степени*) заменяет собой подробное обозначение:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Если при числе не стоит никакого показателя степени, то можно подразумевать при нём показателем единицу; например, a означает то же самое, что и a^1 .

Равенство двух каких-либо выражений обозначается знаком «=», а неравенство знаком «>», который остриём угла должен быть обращён к меньшему числу. Например, если написано:

$$5 + 2 = 7, \quad 5 + 2 < 10, \quad 5 + 2 > 6,$$

то это значит: $5 + 2$ равно 7; $5 + 2$ меньше 10; $5 + 2$ больше 6.

5. Порядок действий. Относительно порядка, в котором надо производить действия, указанные в алгебраическом выражении, условились: *сначала производить действия высшего порядка, т. е. возведение в степень и извлечение корня, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание.*

Так, если написано выражение: $3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$, то при вычислении его надо сначала произвести возведение в степень (число a возвести в квадрат и число b в куб), затем умножение и деление (3 умножить на a^2 и полученный результат на b ; b^3 разделить на c) и, наконец, вычитание и сложение (из $3a^2b$ вычесть $\frac{b^3}{c}$ и к результату прибавить d).

^c Когда приходится по условиям задачи отступать от этого порядка действий, то употребляются скобки и к о б к и. Скобки показывают, что действия над числами, заключёнными в скобки, надо произвести ранее других. Например, выражения:

$$5 + 7 \cdot 2 \text{ и } (5 + 7) \cdot 2$$

означают не одно и то же. В первом случае нужно 7 умножить на 2 и результат прибавить к 5 (получаем 19). Во втором случае надо сначала сложить 5 и 7 и результат умножить на 2 (получаем 24).

Точно так же, если написано:

$$(a + b)c - d,$$

то это значит, что сначала надо сложить a и b , затем полученное число умножить на c и из того, что получится, вычесть d .

Когда приходится заключать в скобки такое выражение, в котором есть свои скобки, то новым скобкам придают какую-нибудь другую форму. Например выражение:

$$a\{b - [c + (d - e)]\}$$

означает, что из d вычитается e , полученная разность складывается с c , полученная сумма вычитается из b и на эту разность умножается a .

Скобкам дают обыкновенно такие названия: круглые скобки (), квадратные, или ломаные, скобки [], фигурные скобки { }.

Когда в выражение входят несколько скобок, то обычно сначала производят действия над числами, заключёнными в круглые скобки, затем над числами в квадратных скобках и, наконец, в фигурных. Производя указанные в скобках действия, мы уничтожаем, или, как говорят, раскрываем скобки. Так, в выражении:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot (6 - 2) - 3 \cdot (5 - 2)]\}$$

сначала раскрываем круглые скобки:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3]\}.$$

Затем раскрываем квадратные скобки:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot 9\}.$$

Наконец, раскрываем фигурные скобки:

$$5 \cdot 6 = 30.$$

Упражнения.

1. Сторона квадрата равна a метрам; выразить его периметр, затем площадь.

2. Если ребро куба равно m сантиметрам, то как выразятся его поверхность, его объём?

3. У прямоугольника основание равно x метрам, а высота на d метров короче основания. Выразить его площадь.

4. Некоторое двузначное число содержит x десятков, y простых единиц. Сколько всех единиц в этом числе?

5. В трёхзначном числе имеется a сотен, b десятков и c простых единиц. Какой формулой можно выразить всё число единиц, содержащееся в этом числе?

6. Смешано 2 сорта чая: первого сорта взято a килограммов, второго b килограммов. Килограмм первого сорта стоит m рублей, второго сорта n рублей. Выразить цену одного килограмма смеси.

7. Указать посредством знаков, принятых в алгебре: 1) сумму квадратов чисел x и y ; 2) квадрат суммы этих же чисел; 3) произведение квадратов этих чисел; 4) квадрат произведения их; 5) произведение суммы чисел a и b на

их разность; б) частное от деления суммы чисел m и n на их разность (последнее выразить двояким путём, т. е. посредством знака «:» и посредством черты).

8. Вычислить следующие выражения при $a = 20$, $b = 8$ и $c = 3$:

$$1) (a + b)c; \quad 2) a + bc; \quad 3) (a + b)a - b;$$

$$4) (a + b)(a - b); \quad 5) (a + b) : c; \quad 6) \frac{a + b}{b - c}.$$

9. Написать выражение, которое получится, если в произведении $3ab$ вместо a подставить сумму $x + y$ и вместо b — разность $x - y$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Алгебра происходит от слова «альджебр». Этим словом начиналось заглавие математического сочинения, написанного учёным Альхваризми (IX в.). Слово «Альхваризми» («из Хорезма») указывает на происхождение учёного из Хорезма (ныне Хива, Узбекистан). Сочинение Альхваризми под названием «Альджебр и альмукабала» излагает способы решения уравнений. Значение слова «алгебра» будет понятно после изучения главы об уравнениях.

Буквы для обозначения чисел ввёл впервые французский математик Виета в 1591 г. После него особенно широко пользовался буквенными обозначениями знаменитый французский философ и математик Рене Декарт (1596–1650).

Знаки, употребляемые в настоящее время в алгебре, введены различными математиками в разное время. Прежде для обозначения действий употребляли целое слово

или даже фразу. Практическая потребность в более быстрых вычислениях приводила к попыткам сокращения отдельных наиболее употребительных слов, пока, наконец, эти слова или их сокращения не заменялись специальными знаками. Укажем время появления наиболее употребительных знаков.

Знаки сложения и вычитания «+» и «-» введены были немецким математиком Видманом в 1489 г. До него ещё они встречаются в рукописях великого итальянского художника Леонардо да Винчи.

Для обозначения равенства введён был (в 1557 г.) английским алгебраистом Рекордом знак «=», «ибо, — как писал он, — никакие два предмета не могут быть более равными, чем две параллельные линии одинаковой длины». Другой английский математик Херриот ввёл знаки «>» и «<» (в 1631 г.) и точку как знак умножения.

В 1694 г. знаменитым немецким математиком Лейбницем (1646–1716) впервые введён знак «:» для обозначения деления, которое раньше него обозначалось чертой.

Скобки (), [] и { } встречаются впервые в трудах фламандского математика Жирара (1629 г.).

Не все эти знаки сразу входили во всеобщее употребление. Некоторые математики продолжали ещё пользоваться частично старыми обозначениями. Алгебраическую символику в её настоящем виде можно считать окончательно установившейся лишь к концу XVIII столетия. Огромное влияние оказали в этом отношении сочинения великого английского учёного Исаака Ньютона (1642–1727).

II. Свойства первых четырёх арифметических действий

Напомним известные уже из арифметики главные свойства действий сложения, вычитания, умножения и деления, так как этими свойствами придется часто пользоваться и в алгебре.

6. Сложение. а) *Сумма не изменяется от перестановки слагаемых* (переместительный закон сложения). Так:

$$3 + 8 = 8 + 3; \quad 5 + 2 + 4 = 2 + 5 + 4 = 4 + 2 + 5.$$

Вообще:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a; & a + b + c + \dots &= b + a + c + \dots = \\ & & &= c + a + b + \dots \end{aligned}$$

Ряд точек показывает, что число слагаемых может быть и более трёх.

б) *Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какие-нибудь из них заменить их суммой* (сочетательный закон сложения). Так:

$$\begin{aligned} 3 + 5 + 7 &= 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15; \\ 4 + 7 + 11 + 6 + 5 &= 7 + (4 + 5) + (11 + 6) = \\ &= 7 + 9 + 17 = 33. \end{aligned}$$

Вообще:

$$a + b + c = a + (b + c) = b + (a + c) \text{ и т. п.}$$

Иногда этот закон выражают так: *слагаемые можно соединять в какие угодно группы.*

в) Чтобы прибавить к какому-либо числу сумму нескольких чисел, можно прибавить отдельно каждое слагаемое одно за другим. Так:

$$5 + (7 + 3) = (5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15.$$

Вообще:

$$a + (b + c + d + \dots) = a + b + c + d + \dots$$

7. **Вычитание.** а) Чтобы вычесть из какого-нибудь числа сумму нескольких чисел, можно вычесть отдельно каждое слагаемое одно за другим. Так:

$$20 - (5 + 8) = (20 - 5) - 8 = 15 - 8 = 7.$$

Вообще:

$$a - (b + c + d + \dots) = a - b - c - d - \dots$$

б) Чтобы прибавить разность двух чисел, можно прибавить уменьшаемое и затем вычесть вычитаемое. Так:

$$8 + (11 - 5) = 8 + 11 - 5 = 14.$$

Вообще:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

в) Чтобы вычесть разность, можно сначала прибавить вычитаемое и затем вычесть уменьшаемое. Так:

$$18 - (9 - 5) = 18 + 5 - 9 = 14.$$

Вообще:

$$a - (b - c) = a + c - b.$$