

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1

ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Корень степени n	8
1.1.1. Понятие корня степени n	8
1.1.2. Свойства корня степени n	9
1.1.3. Тожественные преобразования иррациональных выражений.	13
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1. «Корень степени n ».	14
1.2. Степень с рациональным показателем	16
1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем	16
1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем	17
1.2.3. Тожественные преобразования степенных выражений.	21
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.2. «Степень с рациональным показателем»	22
1.3. Логарифм	24
1.3.1. Понятие логарифма	24
1.3.2. Свойства логарифмов.	24
1.3.3. Десятичные и натуральные логарифмы.	28
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.3. «Логарифмы»	29
1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс	31
1.4.1. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента.	31
1.4.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента	32
1.4.3. Формулы сложения	36
1.4.4. Следствия из формул сложения	38
1.4.5. Формулы приведения.	40
1.4.6. Тожественные преобразования тригонометрических выражений.	41

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.4. «Синус, косинус, тангенс, котангенс»	43
---	----

1.5. Прогрессии	45
1.5.1. Арифметическая прогрессия	45
1.5.2. Геометрическая прогрессия	49

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.5. «Прогрессии».	53
--	----

Тренировочные тестовые задания к разделу 1

«Выражения и преобразования»	55
--	----

Раздел 2

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Уравнения с одной переменной	57
---	----

2.2. Равносильность уравнений	58
---	----

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.1. «Уравнение с одной переменной»	61
---	----

2.3. Общие приемы решения уравнений	63
2.3.1. Разложение на множители	63
2.3.2. Замена переменной.	64
2.3.3. Использование свойств функций.	68
2.3.4. Использование графиков	69

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.3. «Общие приемы решения уравнений».	71
--	----

2.4. Решение простейших уравнений.	73
2.4.1. Решение иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений	73
2.4.2. Использование нескольких приемов при решении уравнений	80

2.4.3. Решение комбинированных уравнений (например, показательно-логарифмических, показательно-тригонометрических, логарифмически степенных, дробно-рациональных относительно степенной функции)	88	Тренировочные тестовые задания к разделу 2 «Уравнения и неравенства»	128
2.4.4. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	90		
2.4.5. Уравнения с параметрами	91		
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.4. «Решение простейших уравнений»	92		
2.5. Системы уравнений с двумя переменными.	94	Раздел 3 ФУНКЦИИ	
2.5.1. Системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения	95	3.1. Числовые функции и их свойства.	130
2.5.2. Системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения	96	3.1.1. Область определения функции	131
2.5.3. Системы, содержащие одно или два показательных уравнения	97	3.1.2. Множество значений функции	133
2.5.4. Системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения	99	3.1.3. Непрерывность функции	135
2.5.5. Использование графиков при решении систем.	100	3.1.4. Периодичность функции	136
2.5.6. Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические)	100	3.1.5. Четность (нечетность) функции	138
2.5.7. Системы уравнений с параметром	101	3.1.6. Возрастание (убывание) функции	139
2.5.8. Системы, содержащие одно или два рациональных уравнения	102	3.1.7. Экстремумы функции	141
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.5. «Системы уравнений с двумя переменными»	104	3.1.8. Наибольшее (наименьшее) значение функции	142
2.6. Неравенства с одной переменной	106	3.1.9. Ограниченность функции	144
2.6.1. Рациональные неравенства	107	3.1.10. Сохранение знака функции.	145
2.6.2. Показательные неравенства.	110	3.1.11. Связь между свойствами функции и ее графиком	146
2.6.3. Логарифмические неравенства	111	3.1.12. Значения функции	165
2.6.4. Использование графиков при решении неравенства	113	3.1.13. Свойства сложных функций	167
2.6.5. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	116	Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.1. «Функции»	172
2.6.6. Неравенства с параметром	120	3.2. Производная функции.	176
2.6.7. Решение комбинированных неравенств	120	3.2.1. Геометрический смысл производной	177
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.6. «Неравенства с одной переменной»	122	3.2.2. Геометрический смысл производной и график функции.	178
2.7. Системы неравенств.	124	3.2.3. Геометрический смысл производной и график производной	179
2.8. Совокупность неравенств	125	3.2.4. Физический смысл производной	179
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.7. «Системы неравенств».	126	3.2.5. Таблица производных.	179
		3.2.6. Производная суммы двух функций	180
		3.2.7. Производная произведения двух функций	181
		3.2.8. Производная частного двух функций	181
		3.2.9. Производная функции вида $y = f(ax + b)$	181
		3.2.10. Производная сложных функций.	181
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.2. «Производная функции»	182
		3.3. Исследование функций с помощью производной	186
		3.3.1. Промежутки монотонности	186
		3.3.2. Промежутки монотонности и график производной	187
		3.3.3. Экстремумы функции.	187
		3.3.4. Точки экстремумов функции	189
		3.3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции	190
		3.3.6. Точки, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значения и график производной	191
		3.3.7. Построение графиков функций	191

3.3.8. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной	192
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.3. «Исследование функции с помощью производной»	194
3.4. Первообразная	196
3.4.1. Первообразная суммы функций	197
3.4.2. Первообразная произведения функции на число	198
3.4.3. Задача о площади криволинейной трапеции.	198
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.4. «Первообразная»	200
Тренировочные тестовые задания к разделу 3 «Функции»	202

Раздел 4 ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

4.1. Проценты	204
4.1.1. Основные задачи на проценты	204
4.2. Пропорции	206
4.2.1. Основное свойство пропорции	206
4.2.2. Прямо пропорциональные величины	207
4.2.3. Обратно пропорциональные величины	208
4.3. Решение текстовых задач	208
4.3.1. Задачи на движение	208
4.3.2. Задачи на работу	210
4.3.3. Задачи на сложные проценты.	211
4.3.4. Задачи на десятичную форму записи числа	212
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.1. «Проценты».	213
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.2. «Пропорции».	215
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.3. «Решение текстовых задач»	217

Тренировочные тестовые задания к разделу 4 «Числа и выражения».	219
--	------------

Раздел 5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

5.1. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Неравенство треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и теорема косинусов. Площадь треугольника	221
---	------------

5.1.1. Равенство треугольников	221
5.1.2. Подобие треугольников	222
5.1.3. Неравенство треугольника.	225
5.1.4. Решение треугольников	226
5.1.5. Площадь треугольника	230

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.1. «Треугольник»	231
--	-----

5.2. Многоугольники.	235
5.2.1. Параллелограмм, его виды. Площадь параллелограмма.	237
5.2.2. Прямоугольник. Площадь прямоугольника	238
5.2.3. Ромб. Площадь ромба	238
5.2.4. Квадрат. Площадь квадрата	239
5.2.5. Трапеция. Средняя линия трапеции. Площадь трапеции	240
5.2.6. Правильные многоугольники	242

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.2. «Многоугольники»	244
---	-----

5.3. Окружность.	246
5.3.1. Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга	246
5.3.2. Окружность, описанная около треугольника	250
5.3.3. Окружность, вписанная в треугольник	251
5.3.4. Комбинация окружностей, описанных и вписанных в треугольник	251

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.3. «Окружность»	252
---	-----

5.4. Равные векторы. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	254
5.4.1. Скалярные и векторные величины.	254
5.4.2. Равенство векторов	254
5.4.3. Координаты вектора	255
5.4.4. Сложение векторов	255
5.4.5. Умножение вектора на число	256
5.4.6. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами	257

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.4. «Векторы»	258
--	-----

5.5. Многогранники	260
5.5.1. Призма	260
5.5.2. Пирамида	270
5.5.3. Правильные многогранники. Сечение плоскостью. Площадь боковой и полной поверхностей. Объем	276

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.5. «Многогранники»	278
--	-----

5.6. Тела вращения.	282
5.6.1. Прямой круговой цилиндр.	282
5.6.2. Прямой круговой конус	287

5.6.3. Шар и сфера. Площадь поверхности. Объем шара	293	6.2.3. Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий.	329
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.6. «Тела вращения»	296	6.2.4. Операции над событиями	330
5.7. Комбинации тел.	302	6.2.5. Вероятность сложных событий	332
5.7.1. Комбинации многогранников.	302	6.2.6. Независимые события	332
5.7.2. Комбинации тел вращения	302	6.2.7. Зависимые события.	335
5.7.3. Комбинации многогранников и тел вращения.	306	6.2.8. Независимые испытания. Схема Бернулли	336
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.7. «Комбинации тел».	312	6.2.9. Статистическое определение вероятности	337
Тренировочные тестовые задания к разделу 5 «Геометрические фигуры, их свойства. Измерение геометрических величин».	314	6.2.10. Закон больших чисел	338
Раздел 6 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ		Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.2. «Вероятность событий»	340
6.1. Простейшие комбинаторные задачи	316	6.3. Решение практических задач: анализ диаграмм и графиков, анализ информации статистического характера	342
6.1.1. Множества и операции над ними	316	6.3.1. Понятие о статистике и ее методах. Статистические таблицы.	342
6.1.2. Элементы комбинаторики	319	6.3.2. Ряд распределения. Наглядное изображение статистического распределения	344
Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.1. «Простейшие комбинаторные задачи»	326	6.3.3. Мода и медиана. Средние значения	345
6.2. Вероятность событий: вычисление вероятности событий на основе подсчета числа исходов.	328	Тренировочные тестовые задания к разделу 6 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятности»	346
6.2.1. Основные понятия теории вероятностей	328	Ответы к примерам заданий ЕГЭ.	348
6.2.2. Классическое определение вероятности	329	Ответы к тренировочным тестовым заданиям	350

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Тренировочное тестовое задание № 1	354	Тренировочное тестовое задание № 2	362
Ответы.	359	Ответы.	367

МАТЕМАТИКА

Теоретический курс с примерами заданий ЕГЭ



Выражения и преобразования



Уравнения и неравенства



Функции



Числа и выражения



Геометрические фигуры
и их свойства



Элементы комбинаторики,
статистики, теории вероятности





Раздел 1

Выражения и преобразования

1.1. Корень степени n

1.1.1. Понятие корня степени n

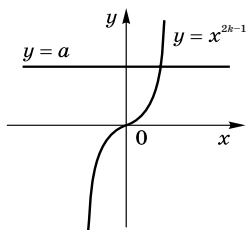
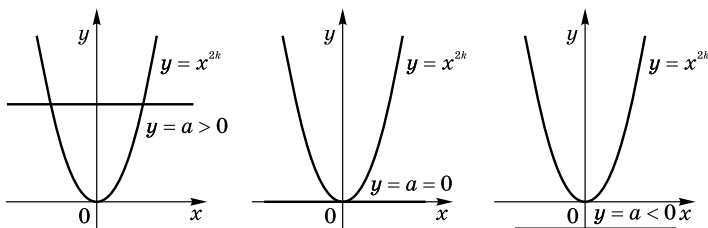
Корнем степени n из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a ; a — действительное число.

Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или -2 , поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

Согласно этому определению, корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a .

Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.



Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n -й степени из числа a .

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

Арифметический корень степени n из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n , коротко говорят «корень степени n » или «корень n -й степени».

Пример 1. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$ и $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3^4 = 81$ и $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, поскольку $1^5 = 1$ и $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, поскольку $0^{100} = 0$ и $0 = 0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел:

$$\sqrt[2k]{a} = x, a \geq 0, k \in \mathbb{N}.$$

Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, k \in \mathbb{N}.$$

Пример 2. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$;

б) $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0, \text{ где } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, где $k \in \mathbb{N}$.

Пример 3. Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a \geq b$; б) $a < b$.

Решение.

$$\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a-b|.$$

а) если $a \geq b$, то $a-b \geq 0$ и $|a-b| = a-b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a-b$;

б) если $a < b$, то $a-b < 0$ и $|a-b| = -(a-b) = b-a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b-a$.

1.1.2. Свойства корня степени n

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\text{если } a \geq 0, b \geq 0, \text{ то } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n -й степени:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ где } a \geq 0, b \geq 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{125} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$;

б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{0,0081} = 4 \cdot 0,3 = 1,2$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000} = 10$; б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324 \cdot 4} = \sqrt[4]{18^2 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6$.

Пример 3. Упростите выражение:

$(\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2$.

Решение.

$$\begin{aligned} (\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 &= (\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2 + 2\sqrt{7+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{10}} + (\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 = \\ &= 7+2\sqrt{10} + 2\sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} + 7-2\sqrt{10} = 14 + 2\sqrt{49-4 \cdot 10} = 14 + 2 \cdot 3 = 20. \end{aligned}$$

Пример 4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{16-8} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\text{если } a \geq 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n -й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geq 0, b > 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\text{если } a > 0, \text{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ где } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$.

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$.

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$; б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = |a^5| = |a|^5$.

Корень степени m из корня степени n

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\text{если } a \geq 0, \text{ то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, m \geq 2, n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{3\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{(3^2)^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \frac{3^2 \cdot 5}{7^2} = \frac{45}{49};$

б) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12} \cdot 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12} \cdot 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6 \cdot 5^6}} = \frac{3^3}{2^2 \cdot 5} = \frac{27}{20} = 1\frac{7}{20}.$

Корень из произведения и частного корней

Пример 1. Упростите:

$$\sqrt[7]{3\sqrt{a^2} \cdot 4\sqrt{ab^2} \cdot 6\sqrt{a^5b} : 8\sqrt{a^7b^3}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\sqrt[7]{3\sqrt{a^2} \cdot 4\sqrt{ab^2} \cdot 6\sqrt{a^5b} : 8\sqrt{a^7b^3}} &= \sqrt[7]{12\sqrt{(a^2)^4} 12\sqrt{(ab^2)^3} \cdot 12\sqrt{(a^5b)^2} : 8\sqrt{a^7b^3}} = \\&= \sqrt[7]{12\sqrt{a^8a^3b^6a^{10}b^2} : 8\sqrt{a^7b^3}} = \sqrt[7]{12\sqrt{a^{21}b^8} : 8\sqrt{a^7b^3}} = \sqrt[7]{24\sqrt{(a^{21}b^8)^2} : 24\sqrt{(a^7b^3)^3}} = \sqrt[7]{24\sqrt{\frac{a^{42}b^{16}}{a^{21}b^9}}} = \sqrt[7]{24\sqrt{a^{21}b^7}} = \\&= 24\sqrt[7]{a^{21}b^7} = 24\sqrt[7]{a^3b}.\end{aligned}$$

Другие комбинации свойств корней степени n

Пример 1. Упростите:

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{2\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \sqrt[6]{24};$

б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{80}} = \sqrt[6]{80};$

в) $\sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4x}} = \sqrt[4]{4x};$

г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[16]{32}.$

Пример 2. Найдите значение выражения:

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} + \frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}.$$

Решение.

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} + \frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} = \frac{(5+2\sqrt{2})^2}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})} + \frac{(5-2\sqrt{2})^2}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})} = \frac{25+20\sqrt{2}+8}{25-8} + \frac{25-20\sqrt{2}+8}{25-8} = \frac{66}{17} = 3\frac{15}{17}.$$

Пример 3. Найдите значение выражения:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} &= \sqrt{(4+\sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{16+8\sqrt{7}+7} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \\&= \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{23^2 - (8\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3.\end{aligned}$$

1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Пример. Вынести множитель из-под корня.

а) $\sqrt[5]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500} = \sqrt[4]{625 \cdot 4} = \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{4} = 5 \cdot \sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{a^9 \cdot b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b} = a^3 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$.

Ответ: а) $2\sqrt[5]{4}$; б) $2\sqrt{6}$; в) $5\sqrt{2}$; г) $a^3 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$.

Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \quad \text{если } a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Для корней четной степени в зависимости от знака a имеем: $a \cdot \sqrt[2n]{b} = \sqrt[2n]{a^{2n} b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$;
 $a \sqrt[2n]{b} = -\sqrt[2n]{a^{2n} b}$, если $a \leq 0, b \geq 0$.

В частности, для квадратных корней: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$; $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$, если $a \leq 0, b \geq 0$.

Пример. Внести множитель под корень:

а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2 \cdot \sqrt[5]{b}$; в) $-5a\sqrt{\frac{8}{25}}, a < 0$.

Решение.

а) $3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$; б) $a^2 \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10} b}$; в) $-5a\sqrt{\frac{b}{25}} = \sqrt{\frac{25a^2 b}{25}} = \sqrt{a^2 b}$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{162}$; б) $\sqrt[5]{a^{10} b}$; в) $\sqrt{a^2 b}$.

Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^k \cdot b^{n-k}}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}. \quad \text{Если } a \geq 0, b > 0,$$

Пример. $\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^2 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{15}$.

Ответ: $\frac{1}{5} \sqrt[3]{15}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1.
«Корень степени n »

Ответом на задания 1–18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.
Ответ следует записать без указания единиц измерения.

1. Вычислите $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Ответ: _____.

2. Вычислите $\sqrt[5]{81 \cdot 96}$.

Ответ: _____.

3. Найдите значение выражения $(\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}})^2$.

Ответ: _____.

4. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Ответ: _____.

5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Ответ: _____.

6. Вычислите $\sqrt{3}(\sqrt{12} - 2\sqrt{27})$.

Ответ: _____.

7. Вычислите $\sqrt{48} - 2\sqrt{3}(2 - 5\sqrt{12})$.

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $(\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}})^2$.

Ответ: _____.

9. Вычислите $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$.

Ответ: _____.

10. Вычислите $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10}+3}}$.

Ответ: _____.

11. Вычислите $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} + \sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$.

Ответ: _____.

12. Вычислите $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} - \sqrt[4]{\frac{625}{16}}$.

Ответ: _____.

13. Вычислите $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Ответ: _____.

14. Вычислите $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} + \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

Ответ: _____.

15. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{0,3^{10} \cdot 2^{15}}$.

Ответ: _____.

16. Найдите значение выражения $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}} \cdot 4^{30}$.

Ответ: _____.

17. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

Ответ: _____.

18. Найдите значение выражения $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Ответ: _____.

1.2. Степень с рациональным показателем

1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

n -й натуральной степенью действительного числа a называется действительное число b , получаемое в результате умножения числа a самого на себя n раз:

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

n -ю степень числа a обозначают a^n и пишут

$$b = a^n.$$

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$).

$$0^n = 0, \quad 1^n = 1, \quad a^1 = a.$$

Например:

$$5^1 = 5; \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81; \quad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Степень с целым показателем

При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$, 0^0 — не определено.

При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (n — натуральное число).

Например:

$$8^{-1} = \frac{1}{8}; \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}; \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9};$$

0^{-5} — не определено.

Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Например:

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5; \quad 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16};$$

$$2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{8}}. \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

$a \geq 0$, n — натуральное число, $n \geq 2$.

Например:

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3; \quad 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}; \quad (-5)^{\frac{1}{3}} \text{ — не определено.}$$

1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем

Произведение степеней с одинаковыми основаниями

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a^{p+q} = a^p \cdot a^q).$$

Пример 1. Представьте выражение в виде степени:

$$\text{а) } b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = b^{\frac{7}{6}};$$

$$\text{б) } x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = x^{\frac{1-1}{2}} = x^0 = 1 \quad \text{при } x \neq 0.$$

Пример 2. Вычислите:

$$\text{а) } 2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}; \quad \text{б) } 5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}.$$

Решение.

$$\text{а) } 2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5} + \frac{11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8;$$

$$\text{б) } 5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7} + \frac{5}{7}} = 5^1 = 5.$$

Пример 3. Вычислите:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 3^1 = 3;$$

$$\left(\frac{16}{0,0625}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{0,0625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,0625^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{(0,5^4)^{\frac{1}{4}}}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,5^{4 \cdot \frac{1}{4}}}{2^{4 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{0,5^1}{2^1} = 0,25.$$

Частное степеней с одинаковыми основаниями

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя:

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \quad \left(a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} \right) \quad \text{или} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

Пример 1. Упростите:

$$\text{а) } a^{\frac{13}{15}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15} - \frac{10}{15}} = a^{\frac{3}{15}} = a^{\frac{1}{5}};$$

$$\text{б) } y^{\frac{5}{9}} : y^{-\frac{1}{6}} = y^{\frac{5}{9} - \left(-\frac{1}{6}\right)} = y^{\frac{5}{9} + \frac{1}{6}} = y^{\frac{10}{18} + \frac{3}{18}} = y^{\frac{13}{18}};$$

$$\text{в) } \frac{z^{-0,3}}{z^{-0,8}} = z^{-0,3 - (-0,8)} = z^{-0,3 + 0,8} = z^{0,5}.$$

Пример 2. Вычислите:

$$\frac{\sqrt[7]{128} \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[7]{2^7} \cdot \sqrt[5]{2^5}}{\sqrt{9^2} \cdot \sqrt[3]{4^3}} = \frac{2^{\frac{7}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{5}}}{9^{\frac{2}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{3}}} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 4} = \frac{1}{9}.$$