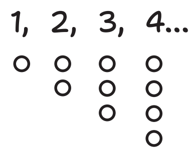
1. ПОЧЕМУ ДВАЖДЫ ДВА — ЧЕТЫРЕ

Как ни парадоксально, друзья, но то тут, то там меня частенько просят доказать, что два плюс два равно четырем. И что дважды два — тоже четыре.



Мы называем словом «четыре» четвертое число в этом ряду (1, 2, 3, 4, 5...). Можно сказать, натуральные числа создал Бог, но названия-то им придумали мы. Вот они, созданные Творцом условные точки, ну а уж мы вправе добавить к каждой последующей еще одну.

Итак...

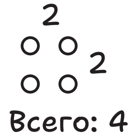
Что же такое «два плюс два»?

Это когда мы к этим имеющимся двум точкам прибавляем еще две и считаем: первая, вторая, третья, четвертая. Подсчитали — доказали.

1, 2, 3, 4, 5...

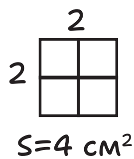
Если говорить про **умножение**, то

> «дважды два» — это нахождение площади квадрата со стороной 2.



Умножить 2 на 2 означает взять два раза по 2. Можем сказать и чуть иначе.

Площадь квадрата со стороной 2 см равна 4 см^2. Пересчитаем: 1, 2, 3, 4 см^2. Вот и все.



Но это доказательство — ссылка на физический опыт. Существует в истории математики такое направление, как «Бурбаки»*, а еще есть подход Германа Вейля**. Что касается математиков из «Бурбаки», то они пытались все на свете аксиоматизиро-

---

* Николя Бурбаки́ (*фр.* Nicolas Bourbaki) — коллективный псевдоним группы французских математиков, созданной в 1935 году. Группа разработала новые принципы подачи математических текстов. Это оказалось непростым для восприятия неподготовленной аудиторией, но зато строгое, формальное изложение исключало любые логические пробелы, а каждая теорема была обоснована и изложена с максимальной точностью. С годами группа создала значительное число терминов и концепций, ставших стандартами в математике.

** Герман Клаус Гуго Вейль [Вайль] (1885–1955) — немецкий математик и физик-теоретик, лауреат премии Лобачевского. Автор философских размышлений о природе математики и ее роли в познании мира.

Николя Бурбаки

Герман Вейль

вать*, и лично я считаю это изначально мертворожденной затеей.

Ну а Вейль, наоборот, говорил, что не нужно пробуксовывать в вопросах, на которые может дать ответ физический опыт. И направлять свое внимание необходимо на интересные и содержательные вещи, которые физический опыт нам сразу даже и не прояснит, и на те, что следует раскрывать постепенно, разворачивая все новые и новые аспекты некоего замысла по поводу устройства нашего мира. Именно это и есть математика! Такова она согласно подходу Германа Вейля.

Моих особо дотошных собеседников интересует и такой вопрос:

— Для чего, собственно, изучать математику?

— **Да чтобы быть умными!**

И это ли не исчерпывающий ответ?!

* Аксиоматизировать — сводить к системе простых постулатов.

2. ПОЧЕМУ НЕЛЬЗЯ ДЕЛИТЬ НА НОЛЬ

Деление на ноль

Один из самых частых вопросов, которые задают автору: «Почему делить на ноль нельзя?»

Кстати, этот вопрос еще ничего. Хуже, когда люди допытываются, почему дважды два — четыре? Каждый раз приходится рисовать квадратик «два на два» и показывать: «*Вот вам 1—2, 3—4. Получается, что “четыре” — это и есть “дважды два”*». Но народ не унимается: «*Почему это так называется?*», «*А почему именно так надо делать?*» И начина-а-ется... Но это все не про математику, это про бардак в голове. Впрочем, мы это уже обсудили в первой главе.

А вот «Почему делить на ноль нельзя?» — это про математику. А еще это про физику.

Давайте начнем...

Есть **два принципиально разных подхода**.

Первый — *физический*, а второй можно назвать формальным или *формально-аксиоматическим*.

Начнем с физического подхода, потому что его легче понять большинству людей.

Итак...

Физический подход

Вот вы пришли на какой-то праздник, где много-много детей, и вы этим детям разливаете сверхвкусный сироп. И этого невероятно вкусного сиропа у вас *1 литр*, и его нужно разлить детям (они его потом разбавят, и получится вкуснющий напиток). Учитель говорит: «Та-а-к! Разливать стр-р-рого *по 10 миллилитров*!»

Внимание! **Вопрос:** на сколько детей хватит имеющегося литра сиропа?

Ну, ответ знает любой второклассник (ну, хорошо, второклассник советской школы... Ладно! Любой второклассник

хорошей школы — такие еще остались...). Так вот, он берет *1 литр* и *делит на 10 миллилитров*.

Наш второклассник получает очевидный ответ: *100*.

$$(1\ \text{л}) : (10\ \text{мл}) = 100.$$

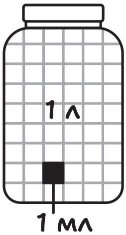
Ответ: 1 литра хватит на 100 школьников.

А потом приходит новое распоряжение, например, от Роспотребнадзора: «*Разливать по 10 миллилитров теперь строго запрещено, это о-очень большая доза! Теперь можно* **только по 1 миллилитру**. *Разливать, а потом все равно водичкой разводить*!»

У нас **новый вопрос**: на сколько детей теперь нам хватит 1 литра сиропа?

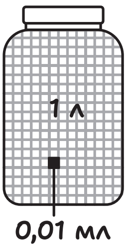
$$(1\ \text{л}) : (1\ \text{мл})$$

Давайте снова спросим у нашего второклассника.



А **ответ** очевиден: «Сиропа хватит на 1000 школьников!» — потому что в 1 литре 1000 миллилитров.

$$(1 \text{ л}) : (1 \text{ мл}) = 1000.$$



На этом Роспотребнадзор не остановился. Выяснилось, что в больших дозах сироп — это яд, и по новым правилам разрешено давать детям только по 1 капле. И вот мы уже 1 литр делим на одну малюсенькую капельку — примерно на 0,01 миллилитра, и оказывается, что 1 литром можно напоить 100 000 школьников:

$$(1 \text{ л}) : (0{,}01 \text{ мл}) = 100\,000.$$

Помните, Христос пять хлебов разделил на несколько тысяч человек, и у нас литра сиропа хватит на 100 000 детей.

* * *

Даже этого разъяснения, полагаю, достаточно, чтобы понять, почему нельзя делить на ноль: да просто потому, что получится бесконечность.

Если вы будете литр делить на все меньшую и меньшую дозу для каждого, в пределе получится то самое деление на ноль: мы делим 1 на 0 и получаем бесконечное число детишек:

$$(1 \text{ л}) : (10 \text{ мл}) = 100;$$

$$(1 \text{ л}) : (1 \text{ мл}) = 1000;$$

$$(1 \text{ л}) : (0{,}01 \text{ мл}) = 100\,000;$$

$$\ldots$$

$$1 \text{ л} : 0 = \infty.$$

Если раздавать по 0 капель, то, естественно, придется раздавать сироп бесконечному количеству детей.

Но *формально бесконечность — это не число*, и фактически измерить его нельзя.

Просто примите утверждение: «**Делить на ноль нельзя!**» Поймите, при делении на ноль все меньших и меньших чисел получаются все большие и большие значения, а это значит, что *в пределе никакого фиксированного значения не получится*.

Все сказанное выше и есть физический подход к объяснению, почему нельзя делить на ноль.

Но я бы не был математиком, если бы не изложил вам...

Формально-аксиоматический подход

Итак, **что такое деление** с точки зрения аксиоматической математики?

Что мы действительно имеем в виду, когда говорим, что a можно разделить на b (что a делится на b):

$$a \vdots b.$$

Когда это происходит?

Ответ такой: по определению, a делится на b тогда и только тогда, когда существует такое c, что при умножении на b оно дает a:

$$a \vdots b \Leftrightarrow \exists c, \text{ такое что } b \cdot c = a.$$

> То есть «разделить» — значит найти такое c, чтобы при умножении его на b получилось a.

Давайте попробуем разделить на 0, скажем, число 1: делится или не делится 1 на 0?

> 1 делится на 0 тогда и только тогда, когда существует число, при умножении которого на 0 получается 1:

$$1 \vdots 0 \Leftrightarrow \exists c, \text{ такое что } c \cdot 0 = 1.$$

Но умножение на 0 — это **аннигиляция**! Это уничтожение. Это значит: «нет *c*», или «*c* умножить на 0 равно 0».

Но ноль единице не равен, поэтому мы не можем поделить единицу на ноль просто формально: не существует такого элемента, который при умножении на ноль давал бы единицу. Таким образом, мы выяснили, что 1 не делится на 0.

$$0 \neq 1;$$

$$c \cdot 0 \neq 1;$$

$$1 \not\vdots\ 0.$$

По тем же причинам это утверждение будет справедливо для любого другого числа, отличного от нуля, например для числа π.

$$\pi \not\vdots\ 0.$$

> **Никакое отличное от нуля число на ноль делиться не может.**

А 0 делится на 0?

Давайте проверим чисто формально: 0 делится на 0? То есть существует ли *c*, при умножении на 0 дающее 0?

Тут у всех должен случиться взрыв мозга... кроме математиков...

Повторим **вопрос**: «Существует ли какое-нибудь число, которое при умножении на 0 дает 0?»

$$c \cdot 0 = 0?$$

Ну да, существует. Вот, например, 1:

$$1 \cdot 0 = 0.$$

Или тот же 0:

$$0 \cdot 0 = 0.$$

и 13 тоже...

$$13 \cdot 0 = 0.$$

При умножении на 0 все они дают 0. Значит, такие числа существуют! При этом мы не спрашивали: «Такое число *единственное* или нет?» Вопрос звучал: «Существует ли?»

Поэтому **чисто формально, алгебраически** (внимание!):

> **0 делится на 0!**

А вот *разделить* 0 на 0 нельзя, потому что «разделить» означает «*найти единственный вариант*», а в данном случае вариант не единственный: **«0 разделить на 0» — это любое число!** Если у нас больше одного результата деления, то мы говорим: «*Нормально разделить нельзя*».

Резюмируем...