

МАТЕМАТИКА С БОРИСОМ ТРУШИНЫМ

КОМБИНАТОРИКА

С НУЛЯ
ДО ОЛИМПИАД

УДК 519.1
ББК 22.141
Т80

Иллюстрация на обложку предоставлена
ООО «ФОКСФОРД».

Трушин, Борис Викторович.

Т80 Математика с Борисом Трушиным. Комбинаторика: с нуля до олимпиад / Борис Трушин. — Москва : Эксмо, 2025. — 240 с. — (Математика с Борисом Трушиным).

ISBN 978-5-04-179678-5

Борис Трушин — автор одноименного популярного канала по околошкольной математике. Эта книга написана по мотивам видеороликов, созданных автором в последние годы. Вы ближе познакомитесь с комбинаторикой и сможете разбираться в этом разделе математики без каких-либо предварительных знаний. Пройдете по увлекательному маршруту от простейших задач на перебор вариантов, через бином Ньютона и треугольник Паскаля, к сложным содержательным задачам. Если вы искали понятную книгу по математике, чтобы не надо было зубрить теоремы, а понять и прочувствовать их, то она перед вами!

УДК 519.1
ББК 22.141

ISBN 978-5-04-179678-5

© Борис Трушин, текст, 2023
© Оформление.
ООО «Издательство
«Эксмо», 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
--------------------------	---

Глава 1

КОГДА НУЖНО УМНОЖАТЬ, А КОГДА – СКЛАДЫВАТЬ?	9
Простой перебор	11
Правила произведения и суммы	18
Повторяющиеся события	22
Выбор иногда уменьшает варианты	29

Глава 2

ДАВАЙТЕ ПОИГРАЕМ В СЛОВА!	37
Перестановки	39
Перестановки с повторениями	46
Бином Ньютона	54
Сумма степеней	60

Глава 3

ОТ БИНОМА ДО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОБРАТНО	67
Числа сочетаний	69
Задача про паучка	73
Опять бином	86
Бином решает	90

Глава 4

НЕОЖИДАННЫЕ СВЯЗИ	95
Два важных равенства	97
Подсчёт двумя способами	100
Соотношения в треугольнике Паскаля	106
Опять про сумму степеней	116

Глава 5

О ШАХМАТАХ, ШАРАХ И БУСАХ	123
Шахматы Фишера	125
Шары и перегородки	129
Комбинаторика в геометрии	133
Комбинаторика и теория чисел	142
Считай ненужное	156
Оценка плюс пример	159
Числа Фибоначчи	162
А теперь порешайте сами	165
Решения задач	172

ПРЕДИСЛОВИЕ

Всем привет! Меня зовут Борис Трушин, и я учитель математики. Я преподаю математику уже 24 года (хотя последние 14 лет в основном онлайн), и уже больше шести лет веду довольно популярный YouTube-канал «Борис Трушин» по околошкольной математике.

Многие разделы и задачи из этой книги можно найти в виде видеороликов на моём канале. Специально для тех, кому проще воспринимать информацию через видео, мы снабдили книгу QR-кодами со ссылками на соответствующие ролики.

В этой книге собран мой многолетний опыт преподавания комбинаторики школьникам разного возраста. Я попытался показать маршрут, по которому можно пройти любому, кто хочет разобраться в азах этой науки.

Если вы только начинаете интересоваться этой темой, то читайте книгу с самого начала, останавливаясь и пытаясь решать все предложенные здесь задачи. Не расстраивайтесь, если не всё получается, отложите задачу на день-два и подумайте ещё. В крайнем случае можно посмотреть подробное решение, которое можно найти для каждой задачи в конце книги.

Некоторые разделы могут быть сложны для новичков, особенно для тех, кто не привык к работе с громоздкими вычислениями. Например, раздел «Сумма степеней» из второй главы, раздел «Бином решает» из третьей или раздел «Опять про сумму степеней» из четвертой главы. Ничего страшного не произойдёт, если вы пропустите их при первом прочтении. Это никак не повлияет на общее понимание остального текста. Но, если вы всё же рискнёте продраться через эти разделы, делайте это вместе с ручкой и листом бумаги. Хотя это пожелание относится и ко всем остальным разделам.

Если же вы уже не совсем новичок в комбинаторике, то некоторые разделы можно смело пропускать, останавливаясь лишь на задачах, которые вызывают сложности и интерес. Но учтите, что многие факты и методы здесь изложены не так, как в большинстве других книг по комбинаторике, поэтому вас могут ждать маленькие открытия даже там, где, как вам кажется, вы всё хорошо знаете.

В любом случае не рассматривайте эту книгу как лёгкое вечернее чтение. Потому что вас ждёт не только множество красивых комбинаторных фактов, идей и методов, но и полторы сотни интересных задач. А задачи не всегда удобно решать, лёжа в постели перед сном.

Те, кто разберётся со всеми рассказанными здесь фактами и методами, решат или хотя бы поймут решения всех изложенных здесь задач, уже будут понимать комбинаторику на достаточно высоком уровне. Кому-то для этого будет достаточно пары недель, а у кого-то может уйти и пара лет.

Приятного вам чтения!

Post scriptum. Хочу выразить слова благодарности всем тем, кто учил меня математике в школе и в вузе, всё, что я знаю и умею в математике и её преподавании, всё благодаря этим людям. В первую очередь это мой отец, Трушин Виктор Борисович, без которого я никогда бы не узнал и не полюбил математику. А также Терёшин Дмитрий Александрович, Петрович Александр Юрьевич, Подлипский Олег Константинович, Карасёв Роман Николаевич, Чубаров Игорь Андреевич, Балашов Максим Викторович, Курочкин Сергей Владимирович, Бесов Олег Владимирович, Половинкин Евгений Сергеевич и ещё пара десятков потрясающих учителей и преподавателей, у которых мне посчастливилось учиться. Спасибо вам, без вас бы не только не было этой книги, но не было бы меня как учителя!

Большое спасибо Константину Кнопу за то, что согласился прочесть рукопись перед публикацией. Его предложения помогли значительно улучшить некоторые разделы этой книги.

Отдельная благодарность моей жене, Елене Трушиной, за то, что взялась первой вычитать эту книгу, взглянув на неё глазами человека, который совсем не знает комбинаторики. Без её помощи в книге было бы гораздо больше мелких опечаток.

*16 августа 2023 года
Борис Трушин*

ГЛАВА

1

КОГДА НУЖНО
УМНОЖАТЬ, А КОГДА —
СКЛАДЫВАТЬ?

Что такое *комбинаторика*? Комбинаторикой называется раздел математики, который решает задачи подсчёта количества объектов, удовлетворяющих какому-либо свойству. Поэтому большинство задач, которые мы будем обсуждать, будут содержать один и тот же вопрос: «Сколько существует различных способов сделать *то-то*?» А начнём мы с совсем простых примеров, решение которых не требует вообще никаких знаний.

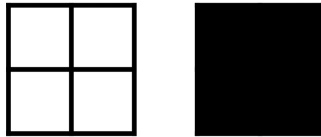
Простой перебор

Если вам нужно посчитать количество чего-то, то часто самый элементарный способ это сделать — просто перечислить все интересующие вас объекты. Главное — убедиться, что ничего не забыто. Например, если вам нужно вспомнить, сколько человек с вами учился в одном классе, то можно попробовать восстановить отсортированный по алфавиту список фамилий, записанный в журнале, а можно нарисовать, как расставлены парты в классе, и вспомнить, кто за какой партой сидит.

Давайте обсудим несколько задач, для решения которых будем пользоваться простым перебором всех возможных вариантов.

Задача 1. Каждую из четырёх клеток квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок таблицы?

Решение. Для того чтобы не пропустить ни одной раскраски, давайте их классифицируем. Есть две одноцветные раскраски:



Есть четыре раскраски, в которых ровно одна чёрная клетка:



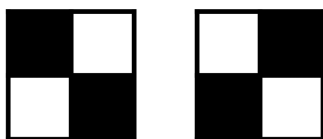
Есть четыре раскраски, в которых ровно одна белая клетка:



Среди раскрасок, в которых по две чёрные и белые клетки, есть, во-первых, четыре таких, у которых одноцветные клетки граничат по стороне:



а во-вторых, ещё две раскраски, у которых одноцветные клетки лежат на диагоналях:



Итого получаем, что существует

$$2 + 4 + 4 + 4 + 2 = 16$$

различных раскрасок таблицы 2×2 в два цвета.

Ответ. 16 раскрасок.

Задача 2. Нужно придумать код из двух букв, в котором на первом месте должна стоять согласная буква, а на втором — гласная. При этом разрешено использовать только буквы

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё.

Сколько различных кодов можно придумать?

Решение. Попробуем выписать все возможные варианты. В качестве первой буквы можно выбрать любую из согласных:

Б, В, Г, Д.

Если возьмём «Б», то можно будет написать следующие коды:

БА, БЕ, БЁ.

Если возьмём «В», то можно написать коды:

ВА, ВЕ, ВЁ.

То же самое можно сделать с «Г» и «Д»:

ГА, ГЕ, ГЁ,
ДА, ДЕ, ДЁ.

В итоге мы получили всего 12 кодов.

Ответ. 12 кодов.

Для более удобного подсчёта можно было выписать все варианты в виде таблицы:

	А	Е	Ё
Б	БА	БЕ	БЁ
В	ВА	ВЕ	ВЁ
Г	ГА	ГЕ	ГЁ
Д	ДА	ДЕ	ДЁ

По этой таблице сразу видно, что всего может быть составлено 12 кодов и что точно посчитаны все возможные коды, удовлетворяющие условию.

Задача 3. Сколько всего существует паролей, состоящих из трёх различных цифр, если в пароле могут быть использованы только цифры 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Попробуем выписать все возможные коды. Давайте рассматривать пароль как трёхзначное число. И, чтобы не пропустить ни одного пароля, выпишем все пароли в порядке возрастания. Сначала будут те, у которых в разряде сотен стоит цифра 1:

123, 124, 125,
132, 134, 135,
142, 143, 145,
152, 153, 154.

Итого 12 различных паролей.

Потом будут те, у которых в разряде сотен стоит цифра 2:

213, 214, 215,
231, 234, 235,
241, 243, 245,
251, 253, 254.

И их снова 12 штук.

Потом будут те, которые начинаются с цифры 3, потом – с цифры 4 и, наконец, те, которые начинаются с цифры 5:

312, 314, 315, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352, 354,
412, 413, 415, 421, 423, 425, 431, 432, 435, 451, 452, 453,
512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542, 543.

В каждой сотне получилось по 12 паролей. А значит, всего во всех пяти сотнях $5 \cdot 12 = 60$ паролей.

Ответ. 60 паролей.