

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
Р59

Роганин, Александр Николаевич.

Р59 Математика / А. Н. Роганин, Ю. А. Захарийченко, Л. И. Захарийченко. — Москва : Эксмо, 2021. — 512 с. — (Самый полный справочник для подготовки к ЕГЭ).

ISBN 978-5-04-118768-2

Справочник предназначен для подготовки учащихся старших классов к ЕГЭ по математике. Представлена необходимая информация по всем темам школьного курса: теоретические сведения, знание которых проверяется на экзамене, и подробные решения задач и примеров. После каждой темы для закрепления знаний включены задания для самостоятельного выполнения.

Издание может быть использовано учащимися для подготовки к урокам и экзамену, учителями и репетиторами для организации учебного процесса.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-118768-2

© Роганин А.Н., Захарийченко Ю.А.,
Захарийченко Л.И., 2021
© Оформление. ООО «Издательство
«Эксмо», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел. 1. Выражения и преобразования

1.1. Корень степени n	10
1.1.1. Понятие корня степени n	10
1.1.2. Свойства корня степени n	12
1.1.3. Тожественные преобразования иррациональных выражений	18
1.2. Степень с рациональным показателем	20
1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем	20
1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем	22
1.2.3. Тожественные преобразования степенных выражений	30
1.3. Логарифм	32
1.3.1. Понятие логарифма	32
1.3.2. Свойства логарифмов	33
1.3.3. Десятичные и натуральные логарифмы	40
1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс	40
1.4.1. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента	40
1.4.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента	42
1.4.3. Формулы сложения	50
1.4.4. Следствия из формул сложения	54
1.4.5. Формулы приведения	57
1.4.6. Тожественные преобразования тригонометрических выражений	59
1.5. Прогрессии	62
1.5.1. Арифметическая прогрессия	62
1.5.2. Геометрическая прогрессия	70
Примеры заданий ЕГЭ к разделу 1	78

Раздел 2. Уравнения и неравенства

2.1. Уравнения с одной переменной	80
2.2. Равносильность уравнений	81
2.3. Общие приемы решения уравнений	86
2.3.1. Разложение на множители	86
2.3.3. Использование свойств функций	95
2.3.4. Использование графиков	99
2.4. Решение простейших уравнений	101
2.4.1. Решение иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений	101
2.4.2. Использование нескольких приемов при решении уравнений	115
2.4.3. Решение комбинированных уравнений (например, показательно-логарифмических, показательно-тригонометрических, логарифмически степенных, дробно- рациональных относительно степенной функции)	132
2.4.4. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	135
2.4.5. Уравнения с параметрами	139
2.5. Системы уравнений с двумя переменными	139
2.5.1. Системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения	143
2.5.2. Системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения	144
2.5.3. Системы, содержащие одно или два показательных уравнения	148
2.5.4. Системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения	149
2.5.5. Использование графиков при решении систем	151
2.5.6. Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические)	151

2.5.7. Системы уравнений с параметром	153
2.5.8. Системы, содержащие одно или два рациональных уравнения	155
2.6. Неравенства с одной переменной	157
2.6.1. Рациональные неравенства	161
2.6.2. Показательные неравенства	166
2.6.3. Логарифмические неравенства	168
2.6.4. Использование графиков при решении неравенства	172
2.6.5. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	177
2.6.6. Неравенства с параметром	184
2.6.7. Решение комбинированных неравенств . .	184
2.7. Системы неравенств.	187
2.8. Совокупность неравенств	188
Примеры заданий ЕГЭ к разделу 2	190

Раздел 3. Функции

3.1. Числовые функции и их свойства	192
3.1.1. Область определения функции	195
3.1.2. Множество значений функции	198
3.1.3. Непрерывность функции	202
3.1.4. Периодичность функции.	204
3.1.5. Четность (нечетность) функции.	207
3.1.6. Возрастание (убывание) функции	208
3.1.7. Экстремумы функции	212
3.1.8. Наибольшее (наименьшее) значение функции	214
3.1.9. Ограниченность функции	217
3.1.10. Сохранение знака функции.	220
3.1.11. Связь между свойствами функции и ее графиком	222
3.1.12. Значения функции.	257
3.1.13. Свойства сложных функций	260
3.2. Производная функции	269
3.2.1. Геометрический смысл производной	272

3.2.2. Геометрический смысл производной и график функции	275
3.2.3. Геометрический смысл производной и график производной	275
3.2.4. Физический смысл производной	276
3.2.5. Таблица производных	277
3.2.6. Производная суммы двух функций	278
3.2.7. Производная произведения двух функций	279
3.2.8. Производная частного двух функций	279
3.2.9. Производная функции вида $y = f(ax + b)$	280
3.2.10. Производная сложных функций	280
3.3. Исследование функций с помощью производной	281
3.3.1. Промежутки монотонности	281
3.3.2. Промежутки монотонности и график производной	283
3.3.3. Экстремумы функции	283
3.3.4. Точки экстремумов функции	287
3.3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции	287
3.3.6. Точки, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значения и график производной	289
3.3.7. Построение графиков функций	290
3.3.8. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной	292
3.4. Первообразная	295
3.4.1. Первообразная суммы функций	298
3.4.2. Первообразная произведения функции на число	299
3.4.3. Задача о площади криволинейной трапеции	300
Примеры заданий ЕГЭ к разделу 3	303

Раздел 4. Числа и выражения

4.1. Проценты	306
4.1.1. Основные задачи на проценты.	306
4.2. Пропорции	309
4.2.1. Основное свойство пропорции	310
4.2.2. Прямо пропорциональные величины	311
4.2.3. Обратно пропорциональные величины	312
4.3. Решение текстовых задач	314
4.3.1. Задачи на движение.	314
4.3.2. Задачи на работу	316
4.3.3. Задачи на сложные проценты	318
4.3.4. Задачи на десятичную форму записи числа	320
Примеры заданий ЕГЭ к разделу 4	321

Раздел 5. Геометрические фигуры и их свойства

5.1. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Неравенство треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и теорема косинусов. Площадь треугольника.	324
5.1.1. Равенство треугольников	324
5.1.3. Неравенство треугольника	332
5.1.4. Решение треугольников	334
5.1.5. Площадь треугольника.	339
5.2. Многоугольники	341
5.2.1. Параллелограмм, его виды. Площадь параллелограмма	344
5.2.2. Прямоугольник. Площадь прямоугольника.	346
5.2.3. Ромб. Площадь ромба.	348
5.2.4. Квадрат. Площадь квадрата	349
5.2.5. Трапеция. Средняя линия трапеции. Площадь трапеции.	350
5.2.6. Правильные многоугольники	353

5.3. Окружность.	356
5.3.1. Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга	356
5.3.2. Окружность, описанная около треугольника.	365
5.3.3. Окружность, вписанная в треугольник.	365
5.3.4. Комбинация окружностей, описанных и вписанных в треугольник.	366
5.4. Равные векторы. Координаты вектора.	
Сложение векторов. Умножение вектора на число. Угол между векторами.	
Скалярное произведение векторов.	367
5.4.1. Скалярные и векторные величины	367
5.4.2. Равенство векторов	369
5.4.3. Координаты вектора	369
5.4.4. Сложение векторов	370
5.4.5. Умножение вектора на число	372
5.4.6. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами	373
5.5. Многогранники	374
5.5.1. Призма.	376
5.5.2. Пирамида.	396
5.5.3. Правильные многогранники. Сечение плоскостью. Площадь боковой и полной поверхностей. Объем	407
5.6. Тела вращения	410
5.6.1. Прямой круговой цилиндр	410
5.6.2. Прямой круговой конус	419
5.6.3. Шар и сфера. Площадь поверхности. Объем шара.	431
5.7. Комбинации тел	435
5.7.1. Комбинации многогранников	435
5.7.2. Комбинации тел вращения	437
5.7.3. Комбинации многогранников и тел вращения	443
Примеры заданий ЕГЭ к разделу 5	455

Раздел 6. Элементы комбинаторики, статистики, теории вероятностей

6.1. Простейшие комбинаторные задачи	458
6.1.1. Множества и операции над ними	458
6.1.2. Элементы комбинаторики.	464
6.2. Вероятность событий: вычисление вероятности событий на основе подсчета числа исходов	475
6.2.1. Основные понятия теории вероятностей	475
6.2.2. Классическое определение вероятности.	478
6.2.3. Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий	479
6.2.4. Операции над событиями	481
6.2.5. Вероятность сложных событий	483
6.2.6. Независимые события	485
6.2.7. Зависимые события	490
6.2.8. Независимые испытания. Схема Бернулли.	491
6.2.9. Статистическое определение вероятности.	493
6.2.10. Закон больших чисел	496
6.3. Решение практических задач: анализ диаграмм и графиков, анализ статистической информации.	498
6.3.1. Понятие о статистике и ее методах. Статистические таблицы.	498
6.3.2. Ряд распределения. Наглядное изображение статистического распределения. . .	502
6.3.3. Мода и медиана. Средние значения	505
Примеры заданий ЕГЭ к разделу 6	507
Ответы к тренировочным тестовым заданиям.	509

1.1. КОРЕНЬ СТЕПЕНИ n 1.1.1. Понятие корня степени n

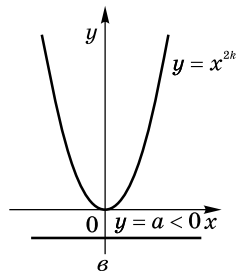
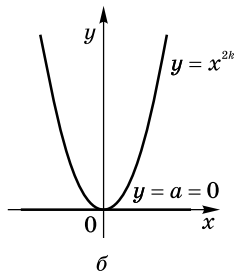
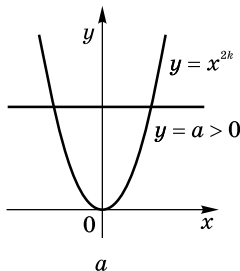
Корнем степени n из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a ; a — действительное число.

Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или -2 , поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

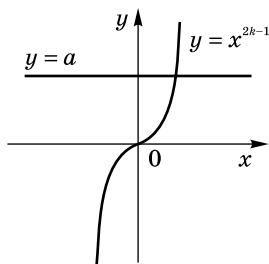
Согласно этому определению корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a .

Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2^{k-1}$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.



Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n -й степени из числа a .



Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

Арифметический корень степени n из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показате-

лем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n , коротко говорят «корень степени n » или «корень n -й степени».

Пример 1. Найдите значение:

- а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

- а) $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$ и $2 > 0$;

- б) $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3^4 = 81$ и $3 > 0$;

- в) $\sqrt[5]{1} = 1$, поскольку $1^5 = 1$ и $1 > 0$;

- г) $\sqrt[100]{0} = 0$, поскольку $0^{100} = 0$ и $0 = 0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел:

$$\sqrt[2k]{a} = x, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример 2. Найдите значение:

- а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2;$

б) $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3.$

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0, \text{ где } k \in N. \end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, где $k \in N$.

Пример 3. Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a \geq b$; б) $a < b$.

Решение.

$\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a-b|.$

а) если $a \geq b$, то $a-b \geq 0$ и $|a-b| = a-b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a-b$;

б) если $a < b$, то $a-b < 0$ и $|a-b| = -(a-b) = b-a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b-a$.

1.1.2. Свойства корня степени n

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

если $a \geq 0, b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n -й степени:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$.

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{125} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$;

б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{0,0081} = 4 \cdot 0,3 = 1,2$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000} = 10$;

б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324 \cdot 4} = \sqrt[4]{18^2 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{(2 \cdot 3^2)^2 \cdot 2^2} =$
 $= \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6$.

Пример 3. Упростите выражение:

$$(\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & (\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 = \\ & = (\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2 + 2\sqrt{7+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{10}} + (\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 = \\ & = 7 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} + 7 - 2\sqrt{10} = \\ & = 14 + 2\sqrt{49 - 4 \cdot 10} = 14 + 2 \cdot 3 = 20. \end{aligned}$$

Пример 4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \\ & = \sqrt[3]{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{16-8} = \sqrt[3]{8} = 2. \end{aligned}$$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\text{если } a \geq 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n -й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geq 0, b > 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

$$\text{а) } \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}; \text{ б) } \sqrt[4]{\frac{625}{16}}; \text{ в) } \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}.$$

Решение.

$$\text{а) } \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5;$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Пример 2. Вычислите:

$$\text{а) } \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}; \text{ б) } \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}.$$

Решение.

$$\text{а) } \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3;$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

если $a > 0$, то $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, где $n \in N$, $n \geq 2$.

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geq 0, n \in N, n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}};$

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}.$

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125;$

б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09.$

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2;$

б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = |a^5| = |a|^5.$

Корень степени m из корня степени n

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

если $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$.

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$;

в) $\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{(3^2)^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \frac{3^2 \cdot 5}{7^2} = \frac{45}{49}$;