

**ПЕРЕЛЬМАН**  
ЯКОВ

**Занимательная  
геометрия**

*Аванта*

Издательство АСТ  
Москва

УДК 51  
ББК 22.1я92  
П27

**Перельман, Яков Исидорович.**

**П27** Занимательная геометрия / Я.И.Перельман. — Москва: Издательство АСТ — 2019. — 222 [2] с.: ил. — (Перельман: занимательная наука)

ISBN 978-5-17-116191-0.

Может ли быть геометрия в лесу, в открытом поле, в дороге, впотьмах, на съемочной площадке, в газетных заголовках и статьях, там, где небо с землей сходятся? Оказывается, может! Везде вокруг нас можно найти геометрические величины и понятия. Это плоскости и углы, расстояния и ракурсы, простые и замысловатые геометрические фигуры. Некоторые из них можно начертить одним росчерком, не отводя ручки от бумаги. Возможно, читателю уже знакомы выражения: «число пи» и «квадратура круга». А как и когда они возникли, и как их вычислить? Книга Якова Перельмана «Занимательная геометрия» поможет дополнить и разнообразить школьные знания живыми примерами, понятными объяснениями и необычными задачами.

Для среднего школьного возраста.

**УДК 51  
ББК 22.1я92**

© Бондаренко А.Л., ил., 2019  
© Станишевский Ю.А., ил., 2019  
© Шелкун Е.В., ил., 2019  
© ООО «Издательство АСТ», 2019



Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры.

*Галилей*

## Глава первая

# ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ

### По длине тени

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева,

не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посветили в начатки геометрии, понял я, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения при помощи весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ — без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до новой эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес, — говорит предание, — избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени<sup>1</sup>. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени...

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключение в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были

---

<sup>1</sup> Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, — именно следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно — что стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

2) что сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооруженный этим знанием Фалес вправду был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: Солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была.

Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (рис. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

т.е. высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников  $ABC$  и  $abc$  (по двум углам).

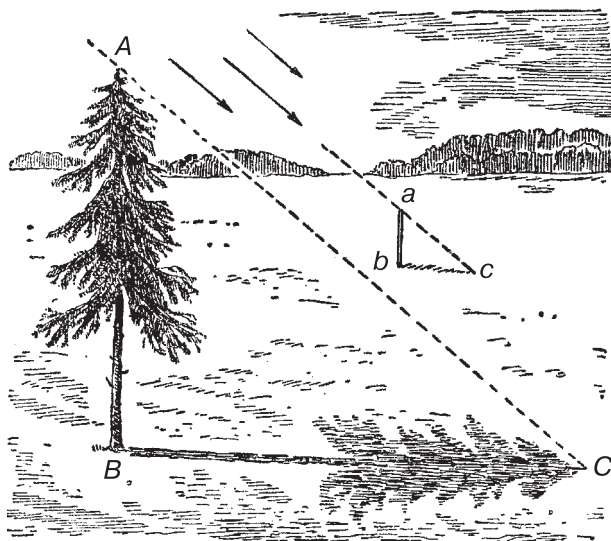


Рис. 1. Измерение высоты дерева по тени

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии

неясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, — оно не оправдывается. На рис. 2 вы видите, что столбик  $AB$  выше тумбы  $ab$  примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы ( $BC : bc$ ) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, в другом нет, — невозможно без геометрии.

### ЗАДАЧА

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря — непараллельны. Последнее очевидно; но почему вправе мы считать лучи Солнца параллельными, хотя они, безусловно, пересекаются в том месте, откуда исходят?

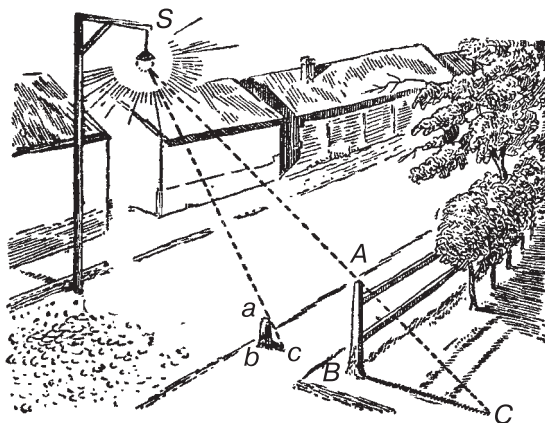


Рис. 2. Когда такое измерение невыполнимо

### *РЕШЕНИЕ*

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другую описали окружность радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли (т.е. радиусом в 150 000 000 км), то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиной. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна  $2\pi \cdot 150\,000\,000$  км = = 940 000 000 км. Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, т.е. около 2 600 000 км; одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, т.е. равна 43 000 км, а одна дуговая секунда еще в 60 раз меньше, т.е. 720 км. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 км; значит, она соответствует углу в  $\frac{1}{720}$  секунды. Такой ни-

чтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов; следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Другое дело — лучи, направленные от какой-нибудь точки Солнца к концам земного диаметра; угол между ними достаточно велик для измерения (около 17"); определение этого угла дало в руки астрономов одно из средств установить, как велико расстояние от Земли до Солнца.

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность.

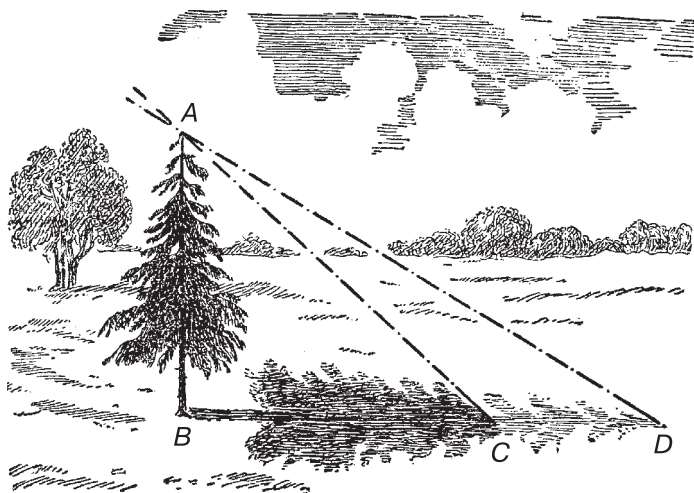


Рис. 3. Как образуется полутень

Происходит это оттого, что Солнце — не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рис. 3 показано, почему вследствие этого тень  $BC$  дерева имеет еще придаток в виде полутени  $CD$ , постепенно сходящей на нет. Угол  $CAD$  между крайними границами полутени

равен тому углу, под которыми мы всегда видим солнечный диск, т.е. половине градуса. Ошибка, происходящая от того, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком даже низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т.д. — и делает окончательный результат мало надежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

### Еще два способа

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.

Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника — и в них втыкают торчком по булавке (рис. 4). Пусть у вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги

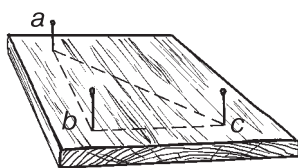


Рис. 4. Булавочный прибор для измерения высот

одинажды, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба

совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния.

Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место  $A$  (рис. 5), из которого, глядя на булавки  $a$  и  $c$ , увидите, что они покрывают верхушку  $C$  дерева: это значит, что продолжение гипотенузы  $ac$  проходит через точку  $C$ . Тогда, очевидно, расстояние  $aB$  равно  $CB$ , так как угол  $\alpha = 45^\circ$ .

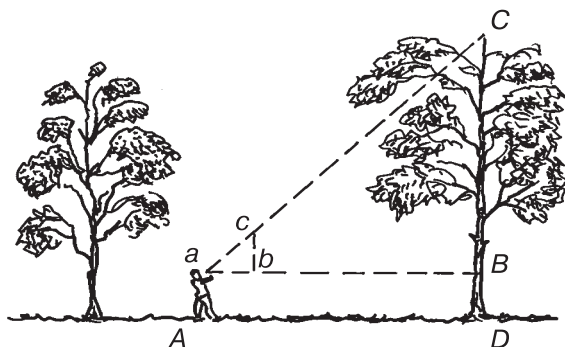


Рис. 5. Схема применения булавочного прибора

Следовательно, измерив расстояние  $aB$  (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние  $AD$ ) и

прибавив  $BD$ , т.е. возвышение  $aA$  глаза над землей, получите искомую высоту дерева.



Рис. 6. Еще один способ определения высоты

По другому способу вы обходитесь даже и без булавочного прибора. Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту. Место для шеста надо выбрать так, чтобы, лежа, как показано на рис. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник  $abc$  — равнобедренный и прямоугольный, то угол  $A = 45^\circ$  и, следовательно,  $AB$  равно  $BC$ , т.е. искомой высоте дерева.

### По способу Жюль Верна

Следующий — тоже весьма несложный — способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюль Верна в известном романе «Таинственный остров».

«— Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида, — сказал инженер.

— Вам понадобится для этого инструмент? — спросил Герберт.

— Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

Взяв прямой шест, футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня (рис. 7). Эту точку он тщательно пометил колышком.

— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

— Да.

— Помнишь свойства подобных треугольников?

— Их сходственные стороны пропорциональны.

— Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим — расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же — мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут: отвесная стена, высоту которой

мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же — мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

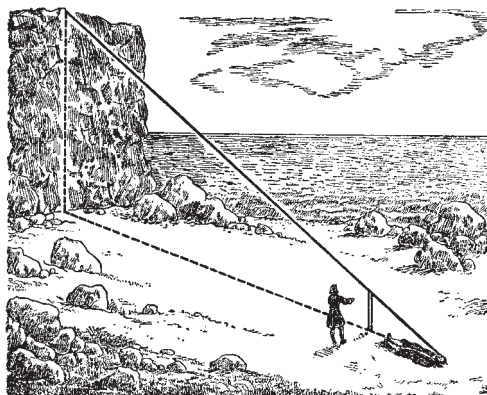


Рис. 7. Как измерили высоту скалы герои  
Жюль Верна

— Понял! — воскликнул юноша. — Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте стены.

— Да. И следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член пропорции, т.е. высоту стены. Мы обойдемся, таким образом, без непосредственного измерения этой высоты.

Оба горизонтальных расстояния были измерены: меньшее равнялось 15 футам, большее — 500 футам.

По окончании измерений инженер составил следующую запись:

$$\begin{aligned}15 : 500 &= 10 : x, \\500 \cdot 10 &= 5000, \\5000 : 15 &= 333,3.\end{aligned}$$

Значит, высота гранитной стены равнялась 333 футам».

### **Как поступил сержант**

Некоторые из только что описанных способов измерения высоты неудобны тем, что вызывают необходимость ложиться на землю. Можно, разумеется, избежать такого неудобства.

Вот как однажды было на одном из фронтов Великой Отечественной войны. Подразделению лейтенанта Иванюка было приказано построить мост через горную реку. На противоположном берегу засели фашисты. Для разведки места постройки моста лейтенант выделил разведывательную группу во главе со старшим сержантом Поповым... В ближайшем лесном массиве они измерили диаметр и высоту наиболее типичных деревьев и подсчитали количество деревьев, которые можно было использовать для постройки.

Высоту деревьев определяли при помощи вешки (шеста) так, как показано на рис. 8.

Этот способ состоит в следующем.

Запасшись шестом выше своего роста, воткните его в землю отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 8). Отойдите от шеста назад, по продолжению  $Dd$  до того места  $A$ , с которого, глядя на вершину дерева, вы увидите на одной линии с ней верхнюю точку  $b$  шеста. Затем, не меняя