УДК 51
ББК 22.1
Г76

Грамши, Антонио.
Г76 Математика? Легко! Задачи и головоломки разных уровней сложности / А.Ю. Грамши. — Москва : Издательство АСТ, 2024. — 160 с.: ил. (Загадки чисел. Головоломки для ума).

ISBN 978-5-17-154770-7

Забудьте о стереотипах! Математика может быть занимательной!

Эта книга докажет, что математика — это не только формулы и уравнения, но и проводник в мир захватывающих головоломок и логических игр. Развивайте нестандартное мышление, прокачивайте смекалку и раскройте свой творческий потенциал, решая упражнения разных уровней сложности. Полюбите математику с первой задачи!

УДК 51
ББК 22.1

Для широкого круга читателей
Издание для дополнительного образования

12+

Грамши Антонио

МАТЕМАТИКА? ЛЕГКО!
Задачи и головоломки разных уровней сложности

Руководитель направления *Шебаршова М.* Ответственный редактор *Трубова В.*
Младший редактор *Коваленко К.* Редактор *Егорова Е.*
Технический редактор *Чернышева Н.* Компьютерная верстка *Недосекина О.*
Дизайн обложки *Васильева Н.*

Подписано в печать 03.07.24. Формат 84×108/16. Усл. печ. л. 16.8.
Печать офсетная. Гарнитура Newton. Бумага офсетная.
Тираж 2000 экз. Заказ №

Произведено в Российской Федерации. Изготовлено в 2024 г.
Изготовитель: ООО «Издательство АСТ» 129085, Москва, Звездный бульвар, д. 21, стр. 1, к. 705, пом. I, 7 этаж
www.ast.ru, e-mail: ask@ast.ru vk.com/ast_nonfiction

«Баспа Аста» деген ООО
129085, қ. Мәскеу, Жұлдызды гүлзар, үй 21, 1 құрылым, 39 бөлме Біздің электрондық мекенжайымыз: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru Интернет-магазин: www.book24.kz. Интернет-дүкен: www.book24.kz
Импортёр в Республику Казахстан. ТОО «РДЦ-Алматы».
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.
Дистрибьютор и представитель по приему претензий
на продукцию в республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор
және өнім бойынша арыз-талаптарды қабылдаушының 129085, Мәскеу қ., Звёздный бульвары, 21-үй, 1-құрылыс, 705-бөлме, I жай, 7-қабат. Тел.: 8(727) 2 51 59 90,91,
факс: 8 (727) 251 59 92 ішкі 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz, www.book24.kz Тауар белгісі: «АСТ». Өндірілген жылы: 2024. Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Өндірілген мемлекет: Ресей. Сертификация – қарастырылмаған

ISBN 978-5-17-154770-7

Предисловие

Не секрет, что в последнее время брешь, разделяющая школьную, зачастую рутинную математику и математику «для избранных» — кружково-олимпиадную, — достигла угрожающих размеров. Чем разнообразней и интересней становится последняя, тем скучнее первая. Это отражается в публикуемой литературе: с одной стороны — недоступные «простым смертным» пособия для физико-математических школ и кружков, с другой — море сборников однотипных технических задач.

Предлагаемые в этом сборнике задачи могут решаться как «обычными», так и мотивированными детьми. Секрет прост: одна и та же идея, пусть даже самая необычная и далекая от школьной тематики, иллюстрируется широким по уровню сложности спектром задач — от самых легких до сложных. Ключевая цель — не натаскать, а привить ЛЮБОВЬ к математике.

Именно на таких примерах дети должны понять, что ломать голову над какой-то задачкой — не скучное утомительное занятие, а соприкосновение с по-настоящему волшебным миром математики, которому, как знать, они захотят посвятить всю свою жизнь. Если же нет, тогда воспоминание о таких математических забавах заложит в них критическое мышление и уважение к точным наукам.

Разумеется, книга предназначена не только для школьников, но и для всех любителей занимательной математики. Автор надеется, что даже профессиональные математики найдут для себя много интересного.

Большинство задач и головоломок можно назвать *креативными*. Это означает, что аналогичные задачи читатели могут с легкостью придумать сами, что служит дополнительным стимулом для творческого освоения математики. Ответы к задачам приводятся в конце каждой главы. Некоторые задачи имеют исследовательский характер, то есть решений к ним не приводится (иногда решение неизвестно и самому автору!). Они, как и задачи, разбираемые по ходу изложения, выделены жирным курсивом.

Главы в книге в целом независимые (кроме первых двух), так что их можно читать в любой последовательности.

В фиолетовых пунктирных рамках даны пояснения к рисункам, дополнительные второстепенные детали, а также разделы, которые при первом чтении можно пропустить — для их понимания требуется более основательная математическая подготовка.

Благодарности

В первую очередь хочется выразить глубочайшую признательность преподавателю «Маткласса» Людмиле Баваровой за всестороннюю поддержку в подготовке рукописи, помощь в составлении задач и новые яркие идеи, обогатившие содержание. Много интересных задач для сборника сочинила Алена Салангина, тоже преподаватель «Маткласса».

Огромная благодарность самому «Маткляссу» — он сподвиг меня на написание первых книг по занимательной математике и предоставил великолепную возможность предложить описанные в них игры и головоломки детям самого разного возраста и уровня математической подготовки.

И низкий поклон моим самоотверженным родителям: экономя буквально на всем, они находили для меня прекрасных учителей математики, которые привили мне любовь к Царице наук.

Об авторе

Фотограф: Н. Чебан

Антонио Грамши (род. в 1965) — итальянско-российский изобретатель головоломок и логических игр, а также музыкант-мультиинструменталист.

Преподает нестандартную математику в онлайн-школе «Маткласс» и лицее «Italo Calvino» при Посольстве Италии в Москве. Публиковался в журнале «Квант» и на портале «Популярная механика». Кроме этого, выпустил 23 книги по занимательной математике в издательстве «Маткласса».

Антонио Грамши играет во многих ансамблях старинной и этнической музыки, пишет музыку для спектаклей.

Совместно с Григорием Амосовым, профессором матмеха Санкт-Петербургского университета и Математического института им. Стеклова, проводит исследования по связи ритмики с алгеброй.

Почта автора для связи и предложений по книге: **gramsci1965@gmail.com**

Часть 1.

Головоломки

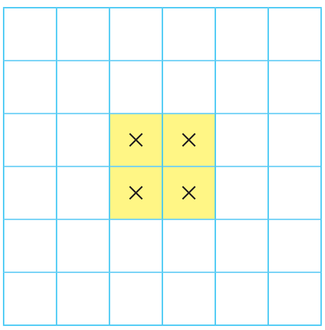
В первой части собраны комбинаторно-геометрические головоломки на расстановку и перестановку фигур, а также игры с числами. Такого рода головоломки (типа судоку, какуро и др.) очень популярны, поскольку не требуют специальных математических знаний.

Глава 1. Тройки

Головоломочный комплекс «Тройки» служит для развития комбинаторно-геометрического мышления и способности видеть математические конструкции в целом.

Правила и простейшие конфигурации

На «бесконечном» листе бумаги в клетку задается произвольная начальная конфигурация из конечного числа крестиков, которую мы назовем *затравкой*. Пример затравки представлен на следующем рисунке:



☞ **Назовем приведенную на рисунке затравку из четырех крестиков тетрадой (от греческого «тетра» — «четыре»). Здесь и на следующих рисунках затравка выделена желтым цветом.**

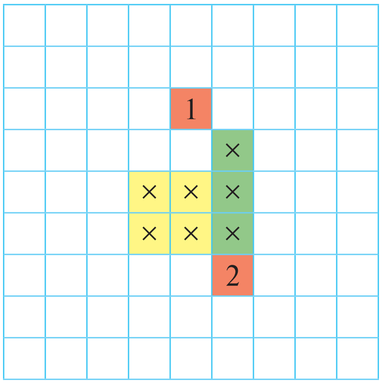
К затравке последовательно добавляются новые крестики по следующим двум правилам.

1. Каждый выставляемый крестик должен образовывать с уже выставленными хотя бы один новый ряд из трех рядом стоящих крестиков по вертикали, горизонтали или диагонали.

   ☞ **Из этого правила следует, что нельзя выставлять изолированный крестик, а также выстраивать ряд, состоящий лишь из двух рядом стоящих крестиков.**

2. Нельзя ставить крестик, если он при этом образует с уже выставленными хотя бы один ряд более чем из трех рядом стоящих крестиков по вертикали, горизонтали или диагонали.

Эти правила иллюстрируются на следующем рисунке:



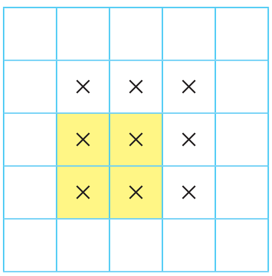
В клетки, выделенные зеленым цветом, ставить крестики можно. После этого в клетку 1 крестик ставить нельзя, так как при этом образовался бы диагональный ряд лишь из двух крестиков (было бы нарушено правило 1). В клетку 2 крестик ставить тоже нельзя, так как при этом образовался бы ряд из четырех рядом стоящих по вертикали крестиков (было бы нарушено правило 2).

Оказывается, соблюдая эти правила, к любой затравке можно добавить лишь конечное число новых крестиков (бесконечные затравки пока не рассматриваются).

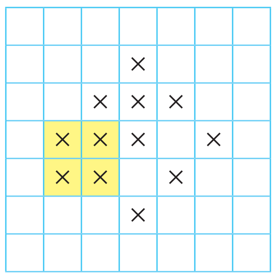
Доказательство мы опустим.

Конфигурации, к которым невозможно, не нарушая правил, добавить новые крестики, назовем *полными*. В противном случае они считаются *неполными*.

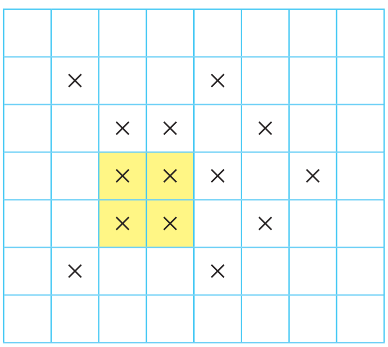
Некоторые полные конфигурации, порожденные тетрадой, обладают изящной симметричной структурой:

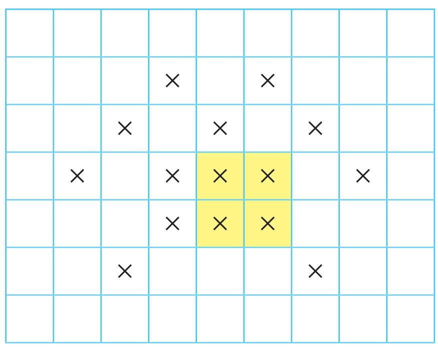


Полная конфигурация из 9 крестиков «квадрат».



Полная конфигурация из 12 крестиков «паровоз»





Полная конфигурация из 14 крестиков «рыба»

Полная конфигурация из 15 крестиков «краб»

Важный класс полных конфигураций — прежде всего с эстетической точки зрения — составляют те из них, в которых нет двоек — рядов, состоящих только из двух рядом стоящих крестиков. Назовем такие конфигурации *совершенными*. Приведем пример такой конфигурации:

	×	×	×		×	×	×	
			×	×	×			
			×	×	×			
				×				
			×		×			

☞ Полная совершенная конфигурация из 15 крестиков «дафния»

Читателю предлагается построить конечные конфигурации для тетрады из иного числа крестиков — 10, 11, 13 и т. д.

Конечность полных конфигураций, полученных из конечных же затравок, естественным образом порождает несколько взаимосвязанных классов задач, которые и можно считать целью игры.

1. Поставь как можно больше крестиков

Для заданной конечной затравки предлагается найти полную конфигурацию с максимальным числом крестиков.

В общем случае эта задача весьма сложна (пока не найдено разумного алгоритма, не сводящегося к простому перебору возможностей). Автор предполагает, что к тетраде можно добавить максимум 19 новых крестиков.

☞ Знатоки программирования могут проверить эту гипотезу на компьютере.

Соответствующая полная конфигурация из 23 крестиков изображена на следующем рисунке:

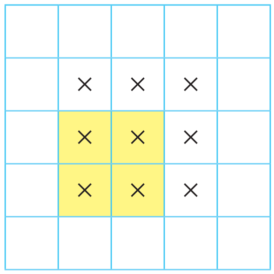
		×			×					
			×		×	×	×			
			×	×	×		×	×	×	
		×	×	×		×	×		×	
	×			×	×	×			×	

Задача 1. Восстановите последовательность ходов, идущую от тетрады к данной полной конфигурации.

Решение приведено в конце главы (с. 24).

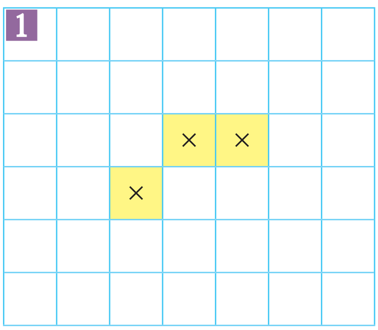
2. Поставь как можно меньше крестиков

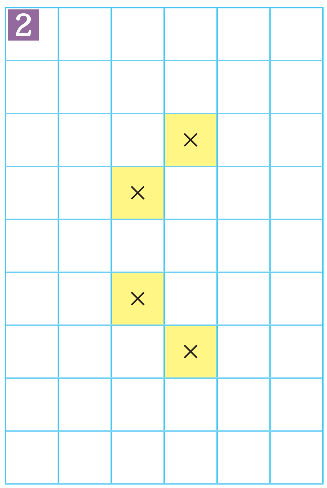
Можно, наоборот, задаться целью найти для данной затравки минимальную полную конфигурацию. Для тетрады ею будет «квадрат»:



В приведенных двух задачах нужно найти минимальную полную конфигурацию для заданной затравки.

Ответы приведены в конце главы (с. 24).





3. Найди минимальную затравку

Для заданной полной конфигурации требуется найти порождающую ее минимальную затравку (то есть такую, которая состоит из наименьшего числа крестиков). Разумеется, при этом нужно отыскать и соответствующую последовательность ходов, ведущую от затравки к данной полной конфигурации. Метод решения очевиден — он сводится к последовательному удалению крестиков из троек (и только из них!). Нужно снять наибольшее число крестиков.

Приведем два примера.

Найдите минимальную затравку для следующей полной конфигурации:

				×				
				×				
			×	×	×			
	×	×	×		×	×	×	
			×	×	×			
				×				
				×				

В качестве решения напрашивается затравка, обладающая тем же типом симметрии, что и конечная конфигурация. Однако задачу решают другие затравки, например следующая:

				×	
				×	
	×	×			

Очень важен порядок удаления крестиков. Восстановим его:

				×				
				×				
			12	11	9			
	×	×	10		4	7	2	
			8	3	5			
				6				
				1				

Задача 1. Найдите минимальную затравку и соответствующий порядок удаления крестиков для следующей полной конфигурации:

			×		×			
		×		×		×		
	×		×	×	×		×	
			×	×	×			
		×				×		
			×	×	×			
				×				
				×				

Решение приведено в конце главы (с. 24).

Составление задач такого рода не менее увлекательно, чем их решение. Способ прост. Сначала строим полную конфигурацию, начиная с затравки из небольшого числа крестиков, например из тетрады. После этого добавляем к ней крестик, но так, чтобы не образовалась избыточная затравка. Снова строим полную конфигурацию и т. д. вплоть до конфигурации, которую будем считать исходной. Теперь предложим партнеру удалить как можно больше крестиков. В идеале решающий должен разобрать предложенную конфигурацию до исходной затравки и дополнительных крестиков.

4. Перестановка крестиков

Крестики можно не только ставить, но и переставлять по одному. Для этого вместо нарисованных крестиков удобнее использовать фишки.

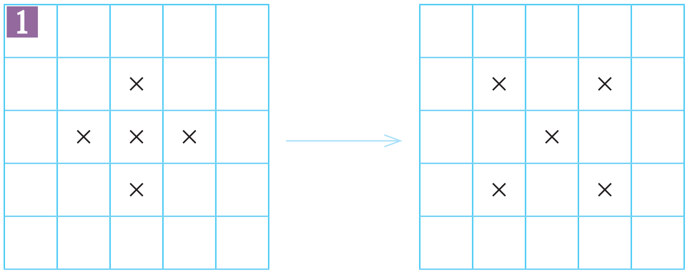
Правила перестановки следующие.

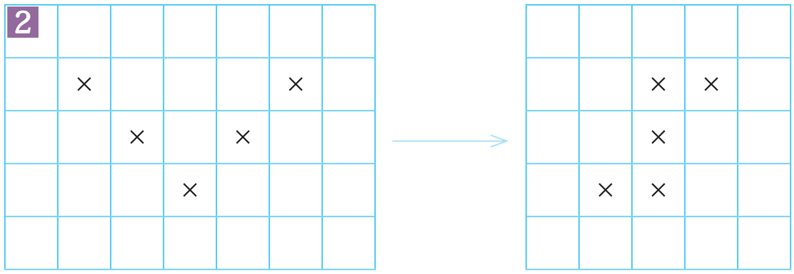
1. При каждом ходе крестик можно снимать только из какой-нибудь тройки.
2. Выставлять снятый крестик нужно так, чтобы он образовывал хотя бы одну тройку с уже имеющимися на поле крестиками.
3. Переставляемый крестик ни на одном ходу не должен порождать ряд более чем из трех крестиков.

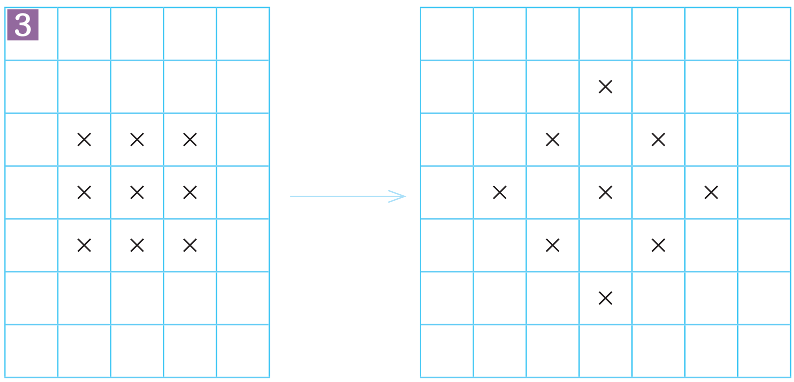
Задача состоит в том, чтобы одну конфигурацию превратить в другую. При этом положение конечной конфигурации относительно исходной несущественно (если в условии не сказано обратного).

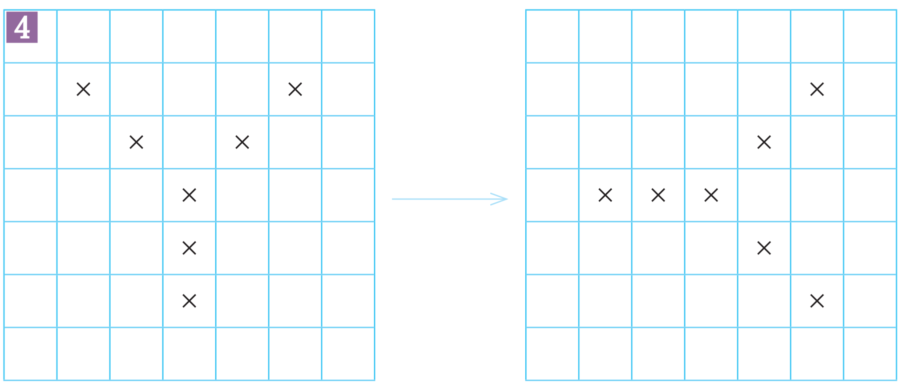
Приведем несколько задач такого рода (Л. Баварова).

Решения приведены в конце главы (с. 25).



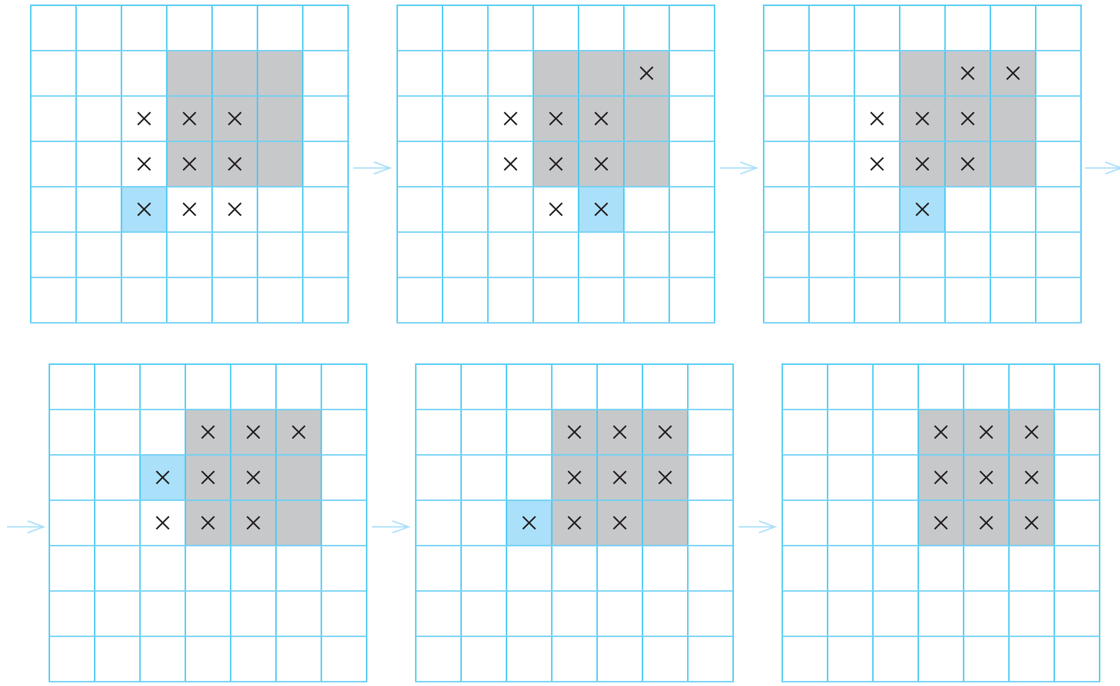






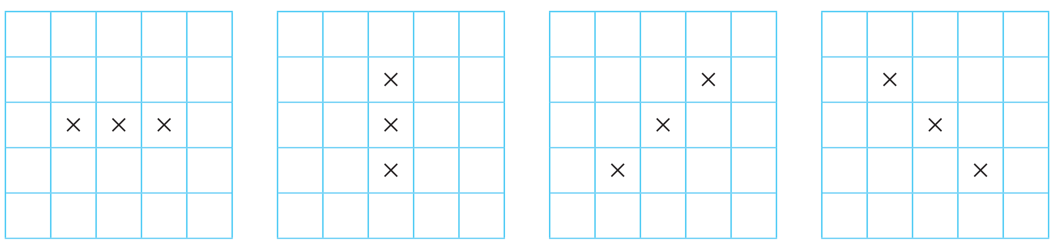
Интересны также задачи на перемещение конфигураций. При этом в результате перестановки крестиков исходная конфигурация оказывается в другом месте поля. В процессе перемещения исходная конфигурация может менять форму.

Рассмотрим для примера конфигурацию «квадрат». Переставляя крестики, его можно переместить в любую часть поля, например, на одну клетку по диагонали вверх и направо:



☞ **Клетки с переставляемыми крестиками выделены голубым цветом. Серым цветом выделена область, куда должен переместиться квадрат.**

При перемещении квадрат меняет форму при каждом ходе. А существуют ли конфигурации, которые при перестановке крестиков остаются неизменными по форме? Самой простой конфигурацией, которая в принципе не может менять форму при перестановке крестиков, очевидно, является одиночная тройка:



Единственно возможный ход для нее — перестановка крестика с одного конца к противоположному. При этом тройка перемещается по единственной прямой.

Интерес представляют конфигурации, которые могут сохранять форму (хотя их ориентация может меняться) после каждого хода и при этом перемещаться в любую часть поля.

Задача 5. Найдите такие конфигурации.
Ответ приведен в конце главы (с. 26).

5. Распределение крестиков по тройкам

Дано некоторое число крестиков. Предлагается построить из них конфигурацию, в которой имеется заданное число различных троек. При этом каждый крестик должен принадлежать хотя бы одной тройке. Запрещены ряды более чем из трех рядом стоящих крестиков. Кроме того, на прямой, задаваемой тройкой, не должно находиться других крестиков.

Будем обозначать конфигурацию из n крестиков, распределенных по m тройкам как (n:m). Найдем конфигурации (n:m) для небольших n. Мы приведем по одному варианту конфигурации. ***Читателю предлагается найти другие варианты, если они имеются.*** Понятно, что минимальное число крестиков в конфигурации равно трем. Поэтому для 3 крестиков существует единственный вариант (3:1), которому соответствует просто тройка крестиков по вертикали, горизонтали или диагоналям.

Для 4 крестиков не существует никаких конфигураций. Попробуйте доказать это самостоятельно.

Для 5 крестиков имеется ровно одна конфигурация — (5:2), вот соответствующий пример:

		×		
	×	×	×	
		×		

(5:2)

Для 6 крестиков имеются две конфигурации — (6:2) и (6:3):

	×	×	
	×	×	
	×	×	

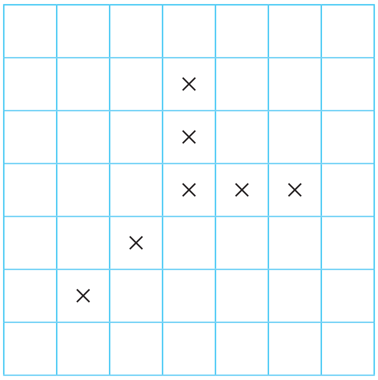
(6:2)

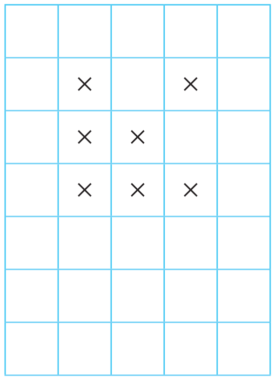
	×		×	
	×	×	×	
	×			

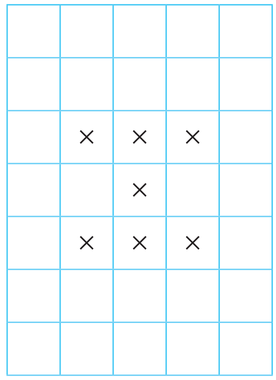
(6:3)

Очевидно, для (6:2) существует бесконечное число вариантов — достаточно поставить две изолированные тройки, которые могут произвольным образом располагаться друг относительно друга. То же самое можно сказать для любой конфигурации вида (3k:k).

Для 7 крестиков имеются три конфигурации — (7:3), (7:4) и (7:5):

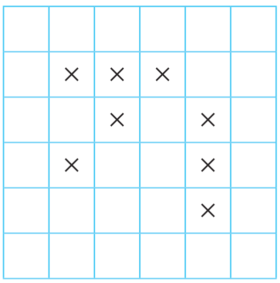

(7:3)

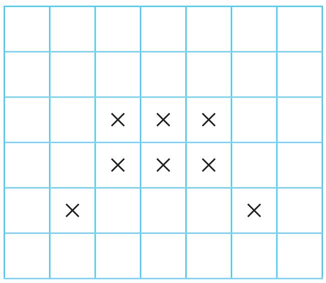

(7:4)

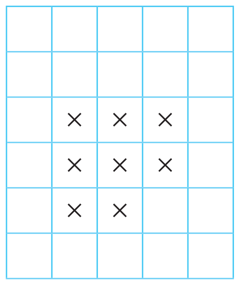

(7:5)

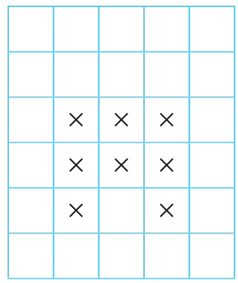
Докажите, что конфигураций других видов для 7 крестиков не существует.

Для восьми крестиков существуют 4 конфигурации — (8:3), (8:4), (8:5) и (8:6):

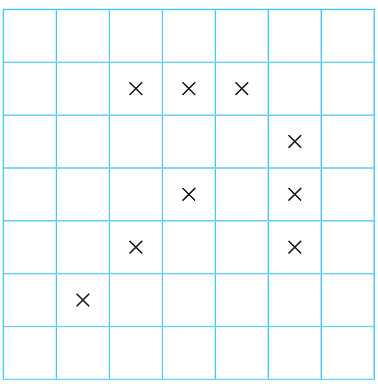

(8:3)

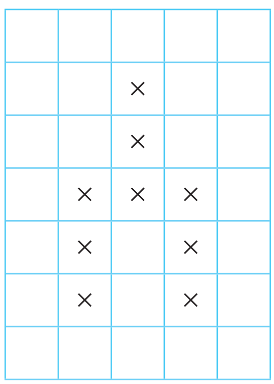

(8:4)

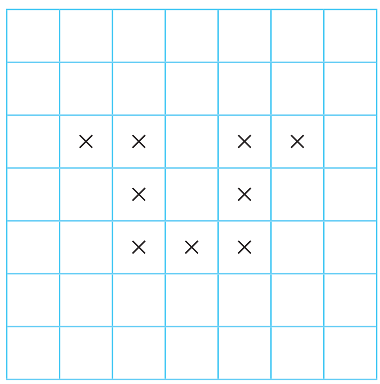

(8:5)

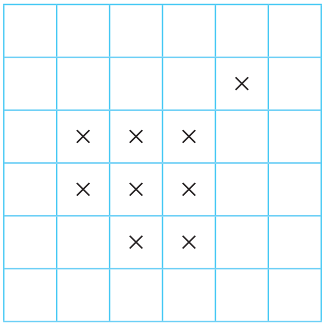

(8:6)

Для 9 крестиков существуют 6 конфигураций — (9:3), (9:4), (9:5), (9:6), (9:7) и (9:8):

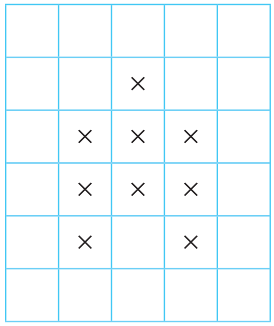

(9:3)


(9:4)

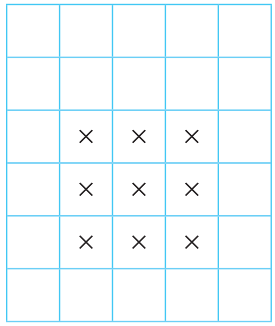

(9:5)



(9:6)



(9:7)

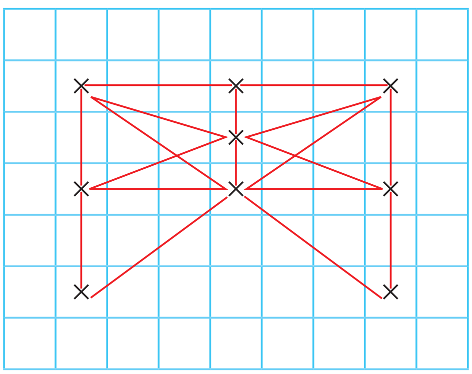


(9:8)

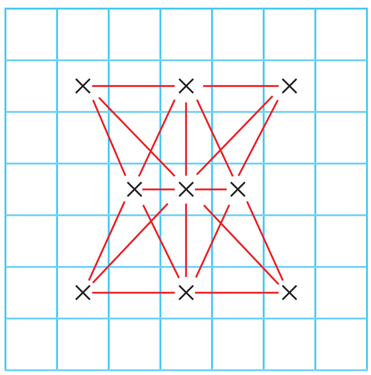
А можно ли добиться еще большего числа троек, по которым можно распределить 9 крестиков? По прежним правилам это сделать невозможно: заполненный квадрат 3×3 клеток порождает максимальное число симметрий и, соответственно, возможных троек.

Попробуем расширить понятие тройки. Теперь будем считать тройкой любой ряд из трех крестиков, расположенных на одной прямой и равноотстоящих друг от друга. Причем будем рассматривать только такие расширенные тройки, которые, кроме собственных крестиков, не содержат других крестиков на соответствующих прямых. Конфигурации, в которых учитываются расширенные тройки, будем помечать звездочкой.

С учетом расширенных троек мы можем реализовать вариант (9:9)* и (9:10)*:



(9:9)*



(9:10)*

Докажите, что не существует конфигурации (9:k)* для k>10.

Правила игры можно перенести на гексагональное поле (с шестиугольными ячейками). Найдем для него конфигурации (*n*:*m*) для небольших *n*.