Под редакцией М. И. Сканави

Полный сборник решений задач по МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в вузы

Группа повышенной сложности

Москва
Издательство АСТ
Мир и Образование

УДК 51(076.1)
ББК 22.11
П51

Издается по лицензии
ООО «Издательство «Мир и Образование»

П51 **Полный сборник решений задач по математике для поступающих в вузы. Группа повышенной сложности** / Под ред. М. И. Сканави. — Москва: Издательство АСТ: Мир и Образование, 2016. — 624 с.: ил.

ISBN 978-5-17-094015-8 (Издательство АСТ)
ISBN 978-5-94666-779-1 (Мир и Образование)

В помощь абитуриентам публикуется полный сборник задач по математике с решениями под редакцией М. И. Сканави по всем группам сложности.

Условия и нумерация всех задач полностью соответствуют изданию «Сборник задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, 6-е издание (М.: Мир и Образование).

Пособия помогут при подготовке к выпускным экзаменам в средней школе, сдаче ЕГЭ и вступительным экзаменам в вуз. Книги адресованы школьникам старших классов, абитуриентам, репетиторам и преподавателям.

УДК 51(076.1)
ББК 22.11

ISBN 978-5-17-094015-8 (Издательство АСТ)
ISBN 978-5-94666-779-1 (Мир и Образование)

Решения к главе 5

КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Число перестановок из n элементов находится по формуле

$$Pn = 1 \cdot 2 \ldots (n-1)n = n!. \tag{5.1}$$

Число сочетаний из n элементов по m находится по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};\ C_n^0 = 1. \tag{5.2}$$

Справедливы следующие свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \tag{5.3}$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \tag{5.4}$$

Число размещений из n элементов по m находится по формуле

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{5.5}$$

Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \tag{5.6}$$

или

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n,$$

где n — натуральное число и $C_n^k a^{n-k} b^k = T_{k+1}$ есть $(k+1)$-й член в разложении бинома ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{5.7}$$

Группа А

Решить уравнения (**5.001—5.005**):

5.001. а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

Решение.

а) По формуле (5.5)

$$A_x^2 = \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(x-3)(x-2)(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(x-3)(x-2)} = (x-1)x = x^2 - x,$$

а по формуле (5.2)

$$C_x^{x-1} = \frac{x!}{(x-1)!(x-x+1)!} = \frac{x!}{(x-1)!\,1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(x-1)} = x.$$

Таким образом, данное уравнение принимает вид

$$(x^2 - x)x = 48 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 48 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 64 + 64 - x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^3 - 64) - (x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 4x + 16) - (x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 4x + 16 - x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 3x + 12) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 4; x^2 + 3x + 12 \neq 0 (D < 0).$$

б) По формуле (5.2) находим

$$x + 6\cdot\frac{x!}{2!(x-2)!} + 6\cdot\frac{x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{6(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(x-2)(x-1)x)}{1\cdot 2\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(x-2))} + \frac{6(1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-3)(x-2)(x-1)x)}{1\cdot 2\cdot 3(1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-3))} =$$
$$= 9x^2 - 14x \Leftrightarrow x + 3(x-1)x + (x-2)(x-1)x = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 +$$
$$+ 14x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9x + 14) = 0,\ x_1 = 0 \text{ или}$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0; x_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2},$$

$$x_2 = \frac{9-5}{2} = 2, x_3 = \frac{9+5}{2} = 7.$$

Корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ не подходят.

Ответ: а) $x = 4$; б) $x = 7$.

5.002. а) $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^{3}=7(x-1)$; б) $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}=\dfrac{24}{23}$.

Решение.

а) Имеем

$$C_{x+1}^{x-2}=C_{x+1}^{x+1-x+2}=C_{x+1}^{3};$$

$$C_{x+1}^{3}=\frac{(x+1)!}{3!(x+1-3)!}=\frac{(x+1)!}{3!(x-2)!}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(x-2)(x-1)x(x+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(x-2)}=\frac{(x-1)x(x+1)}{6};$$

$$C_{x-1}^{3}=\frac{(x-1)!}{3!(x-1-3)!}=\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(x-4)}=\frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{6}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+\frac{2(x-3)(x-2)(x-1)}{6}=$$

$$=7(x-1)\Rightarrow\frac{x(x+1)}{6}+\frac{2(x-3)(x-2)}{6}=7\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-3x-10=0$, откуда $x_1=-2$ (не подходит), $x_2=5$.

б) По формуле (5.5) получим

$$A_x^4=\frac{x!}{(x-4)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x}{1\cdot2\cdot3\ldots(x-4)}=$$

$$=(x-3)(x-2)(x-1)x$$

и

$$A_{x+1}^3=\frac{(x+1)!}{(x+1-3)!}=\frac{(x+1)!}{(x-2)!}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(x-2)(x-1)x(x+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(x-2)}=(x-1)x(x+1).$$

Далее, $C_x^{x-4}=C_x^{x-x+4}=C_x^4$ и

$$C_x^4=\frac{x!}{4!\,(x-4)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(x-4)}=$$
$$=\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{24}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{(x-1)x(x+1)-\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{24}}=\frac{24}{23}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{24(x-3)(x-2)(x-1)x}{(x-1)x(24(x+1)-(x-3)(x-2))}=\frac{24}{23},(\text{при}(x-1)x\neq0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x-2)}{24(x+1)-(x-3)(x-2)}=\frac{1}{23}\Leftrightarrow x^2-6x+5=0,$$
$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm2,$$

$x_1=1$, $x_2=5$; $x_1=1$ не подходит.

Ответ: а) $x=5$; б) $x=5$.

5.003. а) $A_x^3+C_x^{x-2}=14x$; б) $A_x^3-2C_x^4=3A_x^2$.

Решение.

а) По формуле (5.5) получаем

$$A_x^3=\frac{x!}{(x-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(x-3)(x-2)(x-1)x}{1\cdot2\cdot3\ldots(x-3)}=(x-2)(x-1)x.$$

Далее, $C_x^{x-2}=C_x^{x-x+2}=C_x^2$ и по формуле (5.2) имеем

$$C_x^2=\frac{x!}{2!(x-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(x-2)(x-1)x}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(x-2)}=\frac{(x-1)x}{2}.$$

Получаем уравнение

$$(x-2)(x-1)x+\frac{(x-1)x}{2}=14x\ (\text{при}\ x\neq0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-2)(x-1)+\frac{x-1}{2}=14\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-5x-25=0\Rightarrow x_1=-\frac{5}{2}\ (\text{не подходит}),\ x_2=5.$$

б) По формуле (5.5) имеем

$$A_x^3=\frac{x!}{(x-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-3)(x-2)(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-3)}=(x-2)(x-1)x$$ и

$$A_x^2=\frac{x!}{(x-2)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-2)(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-2)}=(x-1)x,$$ а по формуле (5.2) получим

$$C_x^4=\frac{x!}{4!(x-4)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-4)}=$$
$$=\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{24}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$(x-2)(x-1)x-2\cdot\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{24}=3(x-1)x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-2)(x-1)x-\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{12}-3(x-1)x=0\Leftrightarrow(\text{при}\,(x-1)x\neq 0)$$
$$x-2-\frac{(x-3)(x-2)}{12}-3=0\Leftrightarrow x^2-17x+66=0,\ x_1=6, x_2=11.$$

Ответ: а) $x = 5$; б) $x = 11$; $x = 6$.

5.004. а) $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}}=336$; б) $A_x^{x-3}=xP_{x-2}$.

Решение.

По формуле (5.5) получим

$$A_x^5=\frac{x!}{(x-5)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-5)}=$$
$$=(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x.$$

Далее, $C_{x-2}^{x-5}=C_{x-2}^{x-2-x+5}=C_{x-2}^3$ и по формуле (5.2) получим

$$C_{x-2}^3=\frac{(x-2)!}{3!(x-2-3)!}=\frac{(x-2)!}{3!(x-5)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-5)}=$$
$$=\frac{(x-4)(x-3)(x-2)}{6}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x}{\dfrac{(x-4)(x-3)(x-2)}{6}}=336 \Rightarrow x^2-x-56=0,\ x_1=-7$$

(не подходит), $x_2=8$.

б) По формуле (5.5) получим $A_x^{x-3}=\dfrac{x!}{(x-x+3)!}=\dfrac{x!}{3!}=\dfrac{x!}{1\cdot 2\cdot 3}$,

а по формуле (5.1) будем иметь

$P_{x-2}=1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-2)$.

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{x!}{1\cdot 2\cdot 3}=x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-2)\Leftrightarrow\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-2)(x-1)x}{1\cdot 2\cdot 3}=$$
$$=x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\text{при } x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-2)\neq 0\right)\frac{x-6}{6}=1,\ \text{откуда } x=7.$$

Ответ: а) $x=8$; б) $x=7$.

5.005. а) $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}\cdot P_3}=210$; б) $A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}=\dfrac{30}{7}P_x$.

Решение.

а) По формуле (5.1) получим

$P_{x+2}=1\cdot 2\cdot 3\ldots(x+2)$ и $P_3=1\cdot 2\cdot 3$,

а по формуле (5.5) будем иметь

$$A_{x-1}^{x-4}=\frac{(x-1)!}{(x-1-x+4)!}=\frac{(x-1)!}{3!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x+2)}{\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=210\Leftrightarrow\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-1)x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(x-1)}=210\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)(x+2)=210=5\cdot 6\cdot 7.$$

Проверкой убеждаемся, что число 5 удовлетворяет уравнению. Так как левая часть уравнения — монотонно возрастающая функция ($y'=3x^2+6x+2>0$), то других корней нет и корень $x=5$ — единственный.

б) По формуле (5.5) получим

$A_{x+1}^{x-1} = \frac{(x+1)!}{(x+1-x+1)!} = \frac{(x+1)!}{2!} = \frac{(x+1)!}{2}$, а по формуле (5.1) будем иметь $P_{x-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)$ и $P_x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x$.

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{(x+1)!}{2} + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1) = \frac{30}{7} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x \Leftrightarrow \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)x(x+1)}{2} +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1) = \frac{30}{7} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)x \Leftrightarrow \left(\text{при } 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1) \neq 0\right)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} + 2 = \frac{30x}{7} \Leftrightarrow 7x^2 - 53x + 28 = 0, x_1 = \frac{4}{7} \text{ (не подходит)}, x_2 = 7.$$

Ответ: а) $x = 5$; б) $x = 7$.

5.006. Показать, что при любом k сумма $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ есть точный квадрат.

Решение.

По формуле (5.2) получим

$$C_{n+k}^2 = \frac{(n+k)!}{2!(n+k-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+k-2)(n+k-1)(n+k)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+k-2)} =$$

$$= \frac{(n+k-1)(n+k)}{2}$$

и

$$C_{n+k+1}^2 = \frac{(n+k+1)!}{2!(n+k+1-2)!} = \frac{(n+k+1)!}{2!(n+k-1)!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+k-1)(n+k)(n+k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+k-1)} = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2}.$$

Тогда

$$C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2 = \frac{(n+k-1)(n+k)}{2} +$$

$$+ \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} = \frac{(n+k)(n+k-1+n+k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+k)(2n+2k)}{2} = \frac{2(n+k)(n+k)}{2} = (n+k)^2$$ — точный квадрат, что и требовалось доказать.

5.007. Доказать тождества:

а) $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$; б) $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$.

а) По формуле (5.1) получим

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)n$,

$P_{n-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)$ и $P_{n-2} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)$.

Тогда тождество принимает вид

$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)n = (n-1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)n = (n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1+1) \Leftrightarrow (n-1)n =$
$=(n-1)n$ — верное равенство, что и требовалось доказать.

б) По формуле (5.2) получим

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

и

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ C_{n-k}^{m-k} = C_{n-k}^{n-k-m+k} = C_{n-k}^{n-m},$$

$$C_{n-k}^{n-m} = \frac{(n-k)!}{(n-m)!(n-k-n+m)!} = \frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}.$$

Тогда тождество принимает вид

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}$$ — верное равенство, что и требовалось доказать.

5.008. Сумма биномиальных коэффициентов разложения

$$\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$$

равна 64. Определить слагаемое, не содержащее x.

Решение.

Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n, где n — показатель бинома. Тогда по формуле (5.7) получаем

$C_{3n}^0 + C_{3n}^1 + C_{3n}^2 + \ldots + C_{3n}^n = 2^n$.

По условию $2^{3n} = 64$, $2^{3n} = 2^6$, $3n = 6$, $n = 2$.

Исходное условие можно записать следующим образом:

$$\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}=\left(4x+\frac{1}{4x^2}\right)^6.$$

Общий член разложения T_{m+1} имеет вид:

$T_{m+1}=C_{3n}^m a^m x^{3n-m}$. Учитывая, что $3n=6$, имеем

$$T_{m+1}=C_6^m\left(\frac{1}{4x^2}\right)^m(4x)^{6-m}=C_6^m 4^{6-2m}x^{6-3m}.$$

Возьмем m таким, чтобы этот член не содержал x. Тогда
$x^{6-3m}=x^0$, $6-3m=0$, $m=2$.

Таким образом,

$$T_{m+1}=T_{2+1}=T_3=C_6^2 4^{6-2\cdot2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}\cdot4^2=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots6}{1\cdot2\cdot4!}\cdot16=$$
$$=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots6}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot16=240.$$

Ответ: 240; 3-е слагаемое.

5.009. Сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами в разложении $\left(ax+x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x.

Решение.

Сумма всех биномиальных коэффициентов (с нечетными и четными номерами) равна 2^n, где n — показатель бинома.

Далее, сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна $\frac{2^n}{2}=512\Leftrightarrow2^{n-1}=2^9\Leftrightarrow n-1=9, n=10.$ Общий член разложения

$$T_{m+1}=C_n^m a^m x^{n-m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\ldots m}\cdot a^m x^{n-m}.$$

Так как $n=10$, $a=x^{1/4}$, то

$$T_{m+1}=C_{10}^m x^{-m/4}(ax)^{10-x}=\frac{10\cdot9\ldots(10-m+1)}{1\cdot2\ldots m}\cdot x^{(40-5m)/4}\cdot a^{10-m}.$$

Возьмем m таким, чтобы этот член не содержал x. Тогда

$$x^{(40-5m)/4}=x^0,\ \frac{40-5m}{4}=0,\ 40-5m=0,\ m=8.$$

Таким образом, $T_{m+1} = T_{8+1} = T_9 = \dfrac{10\cdot 9\cdot ...3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...8}\cdot a^{10-8} = 45a^2$.

Ответ: $C_{10}^8 a^2 = 45a^2$.

5.010. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

Решение.

Выпишем выражения для T_3, T_4 и T_5:

$T_3 = C_{16}^2 5^{14}(2x)^2$, $T_4 = C_{16}^3 5^{13}(2x)^3, T_5 = C_{16}^4 5^{12}(2x)^4$.

Так как по условию $T_4 > T_3$ и $T_4 > T_5$, то

$$\begin{cases} C_{16}^3 5^{13}(2x)^3 > C_{16}^2 5^{14}(2x)^2, \\ C_{16}^3 5^{13}(2x)^3 > C_{16}^4 5^{12}(2x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{14}{3}\cdot\dfrac{2x}{5} > 1, \\ 5 > \dfrac{13x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28x > 15, \\ 13x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{15}{28}, \\ x < \dfrac{10}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{15}{28} < x < \dfrac{10}{13}.$$

Ответ: $\dfrac{15}{28} < x < \dfrac{10}{13}$.

5.011. Каков наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 4096?

Решение.

Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n, где n — показатель бинома.

Далее, по условию $2^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$, поэтому $(a+b)^n = (a+b)^{12}$ и, так как показатель степени бинома 12 — четное число, то наибольшим биномиальным коэффициентом является коэффициент при среднем члене разложения, т.е. коэффициент при шестом члене:

$$C_m^n = C_{12}^6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = \frac{12!}{6!6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 924.$$

Ответ: 924.

5.012. В разложении $\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \sqrt[10]{\dfrac{a^7}{b^3}}\right)^n$ имеется член, содержащий ab. Найти этот член.

Решение.

$$T_{m+1}=C_n^m a^m x^{n-m}=C_n^m\left(\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^m\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-m}=$$

$$=C_n^m\cdot\frac{a^{7m/10}}{b^{3m/10}}\cdot\frac{b^{(n-m)/2}}{a^{(n-m)/2}}=C_n^m\cdot a^{7m/10-(n-m)/2}\cdot b^{(n-m)/2-3m/10}=$$

$$=C_n^m\cdot a^{(12m-5n)/10}\cdot b^{(-8m+5n)/10},$$

а по условию имеем $a^{(12m-5n)/10}\cdot b^{(-8m+5n)/10}=ab$. Следовательно,

$$a^{(12m-5n)/10}=a\Leftrightarrow\frac{12m-5n}{10}=1\Leftrightarrow 12m-5n=10,\text{ и}$$

$$b^{(-8m+5n)/10}=b\Leftrightarrow\frac{-8m+5n}{10}=1\Leftrightarrow -8m+5n=10.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases}12m-5n=10,\\-8m+5n=10\end{cases}\Rightarrow m=5, n=10.$$

Тогда

$$T_{m+1}=T_{5+1}=T_6=C_{10}^5ab=\frac{10!}{5!\,5!}ab=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}ab=252ab.$$

Ответ: 252 ab.

5.013. Сумма коэффициентов второго и третьего слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Написать член, не содержащий x.

Решение.

По условию имеем

$$-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2=25{,}2\Leftrightarrow-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}=22{,}5\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n^2-5n-204=0$, $n_1=-12$, не подходит, так как $n>0$, или $n_2=17$. Далее, запишем

$$T_{m+1}=C_{17}^m\left(x^{2/5}\right)^{17-m}\left(-\frac{1}{2}x^{-1/6}\right)^m=C_{17}^m\left(-\frac{1}{2}\right)^m x^{(204-17m)/30}.$$

По условию этот член разложения не должен содержать x, то есть $x^{(204-17m)/30}=x^0 \Leftrightarrow \dfrac{204-17m}{30}=0 \Leftrightarrow 204-17m=0, m=12.$ Тогда

$$T_{m+1}=T_{12+1}=T_{13}=C_{17}^{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{12}=C_{17}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{1547}{1024}.$$

Ответ: $\dfrac{1547}{1024}$.

5.014. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в 20 раз больше m, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5 : 1?

Решение.

Имеем $C_m^3\left(\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^3\left(\sqrt{2^{x-1}}\right)^{m-3}=20m$ и $\dfrac{C_m^3}{C_m^1}=\dfrac{5}{1}$.

Далее, по формуле (5.2) получаем

$$C_m^3=5C_m^1=5m \Leftrightarrow \frac{m!}{3!\,(m-3)!}=5m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\cdot 2\ldots(m-3)(m-2)(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\ldots(m-3)}=5m, \frac{(m-2)(m-1)}{6}=5,$$

$m^2-3m-28=0$, $m_1=-4$ — не подходит, $m_2=7$.

Так как $C_m^3=5m$ и $m=7$, то из исходного выражения получим

$$5m\left(\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^3\left(\sqrt{2^{x-1}}\right)^{m-3}=20m \Leftrightarrow 2^x=16, x=4.$$

Ответ: $x=4$.

5.015. Определить A_n^2, если пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

Решение.

Пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ имеет вид

$$C_n^4\left(\frac{1}{x}\right)^4\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-4}=C_n^4x^{-4}\cdot x^{(n-4)/3}=C_n^4x^{(n-4)/3-4}=C_n^4x^{(n-16)/3}.$$

Так как это слагаемое не зависит от x, то

$$x^{(n-16)/3}=x^0\Leftrightarrow\frac{n-16}{3}=0,n=16.$$

Тогда

$$A_n^2=A_{16}^2=16\cdot(16-(2-1))=16\cdot15=240.$$

Ответ: $A_{16}^2=240$.

5.016. В какую натуральную степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

Решение.

По формуле (5.6) для $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)^n$ имеем

$$\frac{C_n^3 3^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-3}}{C_n^2 3^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}}=3\sqrt{2}.$$

Далее, так как

$$C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{1\cdot2\ldots(n-2)(n-1)n}{1\cdot2\cdot1\cdot2\ldots(n-2)}=\frac{(n-1)n}{2},$$

$$C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{1\cdot2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)n}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\ldots(n-3)}=\frac{(n-2)(n-1)n}{6},$$

$$\frac{\frac{(n-2)(n-1)n}{6}\cdot3\cdot2^{(3-n)/2}}{\frac{(n-1)n}{2}\cdot2^{(2-n)/2}}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow n-2=3,n=5.$$

Ответ: $n=5$.