ГЛАВА 2 Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где через a_{ij} обозначен коэффициент при неизвестном x_j в i-м уравнении системы ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$); $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — неизвестные; а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются свободными членами.

Таблица коэффициентов при неизвестных называется *матрицей системы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — *столбцом неизвестных*, а столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — *столбцом свободных членов*. Если $m = n$, то определитель матрицы системы A обозначается чаще всего через $\Delta = |A| = \det A$ и называется определителем системы.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Основными методами решения систем линейных алгебраических уравнений являются метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Первые два метода применимы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей. Методом Гаусса можно решать любую систему линейных алгебраических уравнений.

Формулы Крамера

Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

— определитель системы, а Δ_j — вспомогательные определители, которые получаются из определителя Δ заменой столбца из коэффициентов при x_j столбцом свободных членов:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,j-1} & b_1 & a_{1,\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,j-1} & b_2 & a_{2,\,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,j-1} & b_n & a_{n,\,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Эти формулы называются *формулами Крамера*.

Пример 2.1. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

используя формулы Крамера.

Решение: определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\,(-2)\,\cdot\,(3) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

По формулам Крамера найдем: $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$, $x_2 = \frac{-7}{-7} = 1$, $x_3 = \frac{-7}{-7} = 1$.

Матричный метод

Систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными можно записать в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если матрица A невырожденная, то решение системы линейных алгебраических уравнений определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где A^{-1} — обратная матрица.

Пример 2.2. Решить матричным методом систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение: матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы A равен $|A| = -6 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно получить решение системы в матричном виде:

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Решение матричных уравнений

Иногда требуется решить матричное уравнение вида

$$X \cdot A = B.$$

Если A — квадратная невырожденная матрица, то решение этого уравнения имеет вид

$$X = B \cdot A^{-1},$$

где A^{-1} — обратная к A матрица.

Пример 2.3. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение: решением этого матричного уравнения является матрица $X_{2\times2}$, которая определяется по формуле $X = B \cdot A^{-1}$.

Поскольку $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, то $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Матрица системы, к которой присоединен столбец свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы:

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & & x_n & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array}.$$

Элементарными преобразованиями в расширенной матрице называются преобразования, которые не меняют множество решений системы. Для обозначения элементарного преобразования используют знак ~.

Элементарные преобразования в расширенной матрице

Элементарными преобразованиями в расширенной матрице являются:

1) перемена местами строк;
2) перемена местами столбцов с запоминанием, какому неизвестному соответствует каждый столбец;
3) умножение (деление) строки на число, отличное от нуля;
4) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;
5) вычеркивание одной из двух пропорциональных (равных) строк;
6) вычеркивание нулевой строки.

Пример 2.4. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6; \\ -2x_1-x_2+4x_3=8; \\ 3x_1+2x_2-x_3=4. \end{cases}$$

Решение:

1-й шаг — формирование первого столбца.

Первую строку расширенной матрицы умножим на 2 и прибавим ко второй строке, также первую строку умножим на (–3) и прибавим к третьей строке расширенной матрицы. После этого все элементы первого столбца матрицы, кроме первого, окажутся равными нулю:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (2)(-3) \\ \sim \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \end{array}.$$

2-й шаг — формирование второго столбца.

Вторую строку, умноженную на –1, прибавим к первой строке, вторую строку прибавим к третьей строке расширенной матрицы. После этого все элементы второго столбца матрицы, кроме диагонального, окажутся равными нулю:

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right)\end{array} (1)(-1) \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)\end{array}.$$

3-й шаг — формирование третьего столбца.

Третью строку разделим на 2, чтобы ее диагональный элемент равнялся единице. После этого третью строку, умноженную на –6, прибавим ко второй и третью строку, умноженную на 5, прибавим к первой строке:

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)\end{array} :(2) \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\end{array} (-6)(5) \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\end{array}.$$

Система, которая соответствует полученной расширенной матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3, \end{cases}$$

и решение ее очевидно.

Ранг матрицы. Теорема Кронекера–Капелли

Минором k-го порядка матрицы называется определитель, который состоит из элементов матрицы, расположенных на пересечении k ее строк и k столбцов.

Например, в матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ является ее минором второго порядка, а определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

— минором третьего порядка.

Рангом матрицы называется наивысший порядок ее минора, отличного от нуля. Для ранга матрицы A используют обозначение $r(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1 Если ранг матрицы равен k, то из этого следует, что среди миноров k-го порядка хотя бы один отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2 Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, поэтому их используют при определении ее ранга.

Пример 2.5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix} (-2)(1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{10} & \cancel{-1} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в полученной матрице две строки, ее ранг не может быть больше двух. Среди миноров второго порядка можно указать минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Следовательно, $r(A) = 2$.

Теорема Кронекера–Капелли. Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными была совместной (имела решения), необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы $r(A)$ был равен рангу расширенной матрицы системы $r(B)$.

Если $r(A) = r(B) = n$, то система имеет единственное решение. Если $r(A) = r(B) < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Пример 2.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение: для решения системы используем метод Гаусса:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -4 & 10 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (-2)(-1) \\ \sim \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-3} & \cancel{6} \end{array}\right) \end{array} (2) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right) \end{array}.$$

Ранг матрицы системы $r(A) = 2$, ранг расширенной матрицы $r(B) = 2$, число неизвестных $n = 4$. Так как $r(A) = r(B) < n$, то, согласно теореме Кронекера–Капелли, система имеет бесконечно много решений. Найдем все эти решения. Для этого запишем систему линейных алгебраических уравнений, которая соответствует полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 5x_4 = -8; \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -5x_3 - 5x_4 - 8; \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 6. \end{cases}$$

Неизвестные x_3 и x_4 являются свободными. Их значения задаются произвольно. Пусть $x_3 = t$, $x_4 = z$, где t, z — любые вещественные числа. Число свободных неизвестных k определяется по формуле $k = n - r(A)$. Неизвестные x_1 и x_2 называются базисными. Множество всех решений системы записывается в виде формул, выражающих базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -5t - 5z - 8; \\ x_2 = -2t - 3z - 6; \\ x_3 = t; \\ x_4 = z, \end{cases}$$

где $t,\ z \in R$.

Однородные системы

Однородная система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений всегда имеет нулевое (тривиальное) решение:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

У любой однородной системы $r(A) = r(B)$, так как расширенная матрица B отличается от матрицы A только нулевым столбцом.

Если у однородной системы $r(A) = r(B) = n$, то она имеет только нулевое решение.

Если у однородной системы $r(A) = r(B) < n$, то она имеет ненулевые решения.

Если матрица A однородной системы — квадратная, то однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

Пусть однородная система линейных алгебраических уравнений имеет k ненулевых линейно независимых решений (ни одно из них нельзя выразить линейно через остальные) $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k$. Эти решения образуют *фундаментальную систему*, если любое решение системы X можно представить в виде $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_k$.

Число решений k в фундаментальной системе равно числу свободных неизвестных и определяется по формуле $k = n - r(A)$, где n — число неизвестных, а $r(A)$ — ранг матрицы системы.

Пример 2.7. Имеет ли однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ненулевые решения? Если да, то найти их, выписав фундаментальную систему решений.

Решение: выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее по методу Гаусса:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-2)(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Число неизвестных $n = 4$, $r(A) = r(B) = 2$. Поскольку $r(A) = r(B) < n$, то однородная система имеет ненулевые решения. Выпишем систему, которая соответствует полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 8x_2 = 0; \\ x_4 + 5x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8x_2 + x_3; \\ x_4 = -5x_2. \end{cases}$$

Неизвестные x_2 и x_3 — свободные, их можно задавать произвольно. Обозначим $x_2 = C_1$ и $x_3 = C_2$, где C_1, C_2 — любые вещественные числа. Выпишем решение системы X в матричном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8C_1 + C_2 \\ C_1 + 0 \cdot C_2 \\ 0 \cdot C_1 + C_2 \\ -5C_1 + 0 \cdot C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2.$$

Решения

$$X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ и } X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Задачи для типовых расчетов

Задача 2.1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31; \\ 5x + y + 2z = 29; \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 5y - 4z + 5 = 0; \\ 2x - 3y + z - 2 = 0; \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3; \\ 2x - 4y + 3z = 1; \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 6; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ 2x + 3y - z = 0; \\ x - y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28; \\ 7x + 3y - 6z = -1; \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ 2x + y - 2z - 1 = 0; \\ x + y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ x + 3y + 6z = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-4y+z=3; \\ x-5y+3z=-1; \\ x-y+z=1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-y+z=6; \\ 2x+y+z=3; \\ x+y+2z=5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+y+z=6; \\ x-y+z=5; \\ x+y+2z=4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y+z-1=0; \\ x+2y+3z-2=0; \\ x+3y+6z-1=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-2z-4=0; \\ 2y+z-3=0; \\ x-z=6. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-y+z=4; \\ -x+3y-2z=-3; \\ 3x+2y-z=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x+y-2z=-2; \\ x+y+z=0; \\ x-2y+3z=-3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+2y-z=1; \\ -2x-3y+2z=0; \\ x+5y+z=-5. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x-3y+z=-3; \\ x-5y-2z=6; \\ -2x-y+3z=-9. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+y+z=4; \\ x+2y+2z=3; \\ x+4y-z=-2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x-y-z+3=0; \\ x+3y+3z=-4; \\ -x+2y-z=5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x-y=7; \\ 5x+3y-6z=-5; \\ -x-2y+3z=7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x-y+z=12; \\ x+2y-z=12; \\ 2x-y+3z=9. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+3y-2z=-4; \\ x-y+4z=4; \\ 3x+2y-z=-9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x+y+z=6; \\ 2y+z=13; \\ 3x+y+2z=8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x-y+3z=8; \\ x+y-2z=5; \\ 3x-2y+z=7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x+3y-z=4; \\ -x+2y+3z=12; \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x-y+z=-17; \\ x-3y+2z=-11; \\ 2x+y+z=0. \end{cases}$

Задача 2.2. Решите матричное уравнение.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$

2. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$

6. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & -19 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

8. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

10. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$

12. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

14. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$

16. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$

18. $X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -28 & -6 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$

20. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 24 \end{pmatrix}.$

22. $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -20 & 13 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$

24. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 32 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$

28. $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}.$

29. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

30. $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$

Задача 2.3. Найдите общее решение, построив фундаментальную систему для однородной системы линейных алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0; \\ 7x_1 - 14x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0; \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0; \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0; \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0; \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0; \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0; \\ 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0; \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0; \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0; \\ -6x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0; \\ 8x_1 - 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0; \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0; \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 - 27x_5 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0; \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0; \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$