

Моим родителям

οὐκ ὃ ἐν τῇ κεφαλῇ, ἀλλ' ἐν ᾧ ἡ κεφαλὴ ἐστίν.*

* Не то, что в голове, но то, в чем голова (*зреч.*). — Прим. пер.

Небольшое, но важное предисловие

К сожалению, это одно из тех предисловий, которые вам все-таки придется прочесть — и в начале — по крайней мере для того, чтобы разобраться в некотором структурном своеобразии и расшифровать блоки, смахивающие на куски кода. Чаше других в тексте встречается жирное «**ex3**»». Не примите его за опечатку или случайный набор знаков: оно заменяет слова «если хотите знать больше» и столько раз употреблялось в черновиках, что после многократного повторения эволюционировало из обычной вводной конструкции естественного языка в некий абстрактный внетекстовый символ для выделения определенных фрагментов текста. Каких именно и зачем — поясняется ниже.

Как и другие тома серии «Великие открытия», книга у вас в руках относится к научно-популярной литературе. Она посвящена достижениям в области математики, абстрактным и крайне сложным, но в то же время удивительно изящным, интересным и значимым. Цель книги — раскрыть их ценность и яркость так, чтобы для чтения не требовалось никаких профильных знаний или навыков. Показать, насколько красивой может быть математика, или хотя бы объяснить, почему ее таковой считают. Но легче сказать, чем сделать, ведь сразу возникает загвоздка: как подобрать степень строгости изложения, чтобы не отпугнуть читателя и не похоронить его любопытство под бесконечными формулировками

и уточнениями? Если добавить обоснованное предположение о том, что книгу будут читать как люди с техническим образованием, так и без оно, то задача окажется еще сложнее: как выстроить обсуждение, чтобы оно оставалось и понятным для неспециалистов, и нескучным для тех, кто изучал высшую математику в университете?

Символы «**ехз**>» отмечают материал, который в зависимости от предпочтений можно внимательно изучить, бегло просмотреть или вовсе пропустить без ущерба для понимания. К данной категории относится более половины сносок, отдельные абзацы и даже несколько параграфов целиком. Попадают среди них отступления от темы¹, занимательные исторические факты, а также базовые определения и пояснения, и так очевидные для подкованного в математике читателя. Тем не менее большинство **ехз**>-фрагментов предназначены для тех, кого отличает либо сильная математическая подготовка, либо небывалый интерес к предмету, либо сверхъестественная усидчивость, либо все перечисленное сразу: в них (фрагментах) более подробно разбирается то, что поверхностно упоминается в основном обсуждении.

В тексте есть и другие сокращения. Одни введены ради экономии места. Другие помогают решить характерную для научных статей проблему, когда одни и те же слова приходится использовать снова и снова так, что это испортило бы любой другой текст. Дело в том, что научные термины

¹ **ехз**> Вот пример подобного замечания. Автор, как увлеченный любитель, на довольно серьезном уровне интересуется математикой и формальными системами. При этом все пройденные им курсы по математике ему не понравились и были закончены с весьма средними оценками, кроме одного — даже не входящего в университетскую программу, но прочитанного тем редким преподавателем, который на лекциях по-настоящему общается с аудиторией и умеет интересно рассказывать даже о самых абстрактных вещах, и самые удачные места этой книги — неловкое, но искреннее подражание его стилю.

имеют строго определенное значение, и синонимы его передать не способны. Единственным способом привести хоть толику разнообразия оказываются аббревиатуры, особенно при многократном повторении имен собственных. Но всё это на самом деле не ваши проблемы — сокращения применяются так, что их значение должно быть ясно из контекста, а на случай авторских упущений и/или недопонимания ниже приводится список, к которому можно обращаться при необходимости:

1-1С	= взаимно однозначное соответствие
АВ	= аксиома выбора
АР	= аксиома регулярности
АС	= аксиома степени
АТМ	= аксиоматическая теория множеств
«А. Т. Т.»	= «Аналитическая теория тепла» Фурье
БТ	= биномиальная теорема
ВУ	= волновое уравнение
ВП	= вещественная прямая
ДД	= диагональное доказательство
«Д. Н. Н.»	= «Две новые науки» Галилея
ДП	= декартово произведение
ДУ	= дифференциальное уравнение
ЗИТ	= закон исключенного третьего
ЗКС	= задача о колеблющейся струне
КГ	= континуум-гипотеза
Н&Л	= Ньютон и Лейбниц
НБ	= система аксиом фон Неймана — Бернайса
«Н. и И. Ч.»	= «Непрерывность и иррациональные числа» Дедекинда
НТМ	= наивная теория множеств
ОТА	= основная теорема анализа
«П. Б.»	= «Парадоксы бесконечного» Больцано

ПБР	= порочный бесконечный регресс
ПЗ	= парадокс Зенона
ПИ	= принцип индукции
ПК	= порочный круг
ПНА	= принцип неограниченной абстракции
ПОА	= принцип ограниченной абстракции
ПСРФ	= проблема сходимости рядов Фурье
РП	= рациональная прямая
СБП	= священное братство Пифагора
ТБВ	= теорема Больцано — Вейерштрасса
ТВЭЗ	= теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях (о функции на компакте)
ТЕМ	= теория единого над многим Платона
ТП	= теорема Пифагора
ЦФС	= система аксиом Цермело — Френкеля — Скулема
ЭГ	= ЭКСТРЕННЫЙ ГЛОССАРИЙ

§ 1a. Есть такой раздел науки, как история математики. Прочитируем замечательные слова одного из историков 30-х годов:

«Вывод кажется неизбежным: без непротиворечивой теории бесконечных величин не будет иррациональных чисел, без иррациональных чисел — математического анализа, хотя бы отдаленно напоминающего тот, что мы имеем сегодня; и, наконец, без анализа рассыплются целые области, включая геометрию и большую часть прикладной математики. Таким образом, построение приемлемой теории бесконечных величин становится задачей первостепенной важности. Ее и попытался решить Кантор, а насколько он преуспел, увидим позднее».

Отложим до поры обсуждение притягательных математических терминов. Под Кантором, упомянутым в конце приведенного отрывка, подразумевается профессор Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор, 1845 года рождения, выходец из купеческой семьи, натурализованный подданный Германской империи, общепризнанный основатель теории множеств и трансфинитных чисел. До сих пор ведутся споры о его происхождении, например, о том, считать ли его евреем². С латыни «кантор» переводится как «певец».

Георг Кантор — самый выдающийся математик XIX столетия, человек глубокий, сложный и восприимчивый. В последние годы жизни он периодически лечился в психиатрических больницах и встретил смерть в одной из них,

² Георг Кантор родился 3 марта 1845 года в Санкт-Петербурге и прожил там одиннадцать лет до переезда вместе с родителями во Франкфурт-на-Майне. Отец Кантора имел еврейские корни, числился купцом и биржевым маклером. — Прим. пер.

в Галле³, в 1918 году. Величайшего математика XX столетия, Курта Гёделя, также свело в могилу психическое расстройство. Людвиг Больцман, крупнейший физик и математик XIX века, совершил самоубийство. И так далее и тому подобное. Историки и научные журналисты любят порассуждать о проблемах Кантора с психикой и о том, как именно они связаны с его работами по ∞ .

На II Международном конгрессе математиков в 1900 году в Париже профессор Гильберт, лучший математик того времени, назвал предложенные Кантором трансфинитные числа «великолепным плодом математической мысли и одним из красивейших достижений человечества в чисто умозрительной области».

Честертон писал: «Поэты не сходят с ума, с ума сходят шахматисты; математики и кассиры бывают безумны, творческие люди — очень редко. Как будет ясно из дальнейшего, я вовсе не нападаю на логику — я только говорю, что опасность таится в ней, а не в воображении». А вот аннотация на обложке недавно изданной биографии Кантора: «На закате девятнадцатого века гениальный математик томился в сумасшедшем доме. Каждый шаг к решению, которое он жаждал найти, не приближал, а удалял его от цели. В конце концов он лишился рассудка, как и многие на этой стезе до него».

Истории великих математиков, подверженных психическим болезням, невероятно привлекают современных писателей и режиссеров, на чье восприятие и предрассудки влияют характерные для наших дней архетипические паттерны. Разумеется, шаблоны постепенно меняются. Потерявший рассудок математик сегодня несет ту же смысловую нагрузку, что и странствующий рыцарь, святой мученик, мятущийся

³ **ехз>** Галле — город на соляных копях в окрестностях Лейпцига, чье название буквально означает «место, богатое солью», известен как родина Генделя.

творец и безумный ученый в прежние эпохи, — подобно Прометею он проникает в запретные области, возвращается с дарами для всего человечества и один принимает на себя всю тяжесть расплаты. В большинстве случаев данное сравнение оказывается неоправданным преувеличением⁴, но Кантору оно подходит лучше, чем многим другим. Причины этого гораздо интереснее, чем любые проявления его болезни⁵.

Просто перечислить достижения Кантора еще не значит оценить их по достоинству, а главный замысел книги заключается именно в последнем и подразумевает представление математики бесконечных величин в виде могучего дерева, чьи корни уходят в древнегреческие парадоксы непрерывности и несоизмеримости, а ветви — Брауэр, Гильберт, Рассел, Фреге, Цермело, Гёдель, Коэн и многие другие — сплетаются в узел, соответствующий кризису оснований математики. Здесь для нас не так важны имена, как аналогия с деревом, — одна из центральных метафор, на которую стоит обратить внимание.

⁴ **ехз>** Как и противоположный стереотип, изображающий математиков как занудных бесполох ботаников в галстуках-бабочках. В современной типологии эти два клише взаимодополняют друг друга.

⁵ С точки зрения медицины очевидно, что Г.Ф.Л.Ф. Кантор страдал от маниакально-депрессивного расстройства в ту пору, когда еще не знали, что это такое, — его полярные циклы усугублялись хроническим стрессом и многочисленными разочарованиями. Аннотация в таком ключе, вероятно, привлекла бы меньше внимания, чем громкие слова о «гении, которого свели с ума попытки укротить ∞ ». Между тем работы Кантора и сопутствующие им идеи настолько красивы и удивительны, что нет никакой нужды превращать рассказ о нем в подобие греческого мифа. Ирония в том, что отношение к бесконечности как к чему-то запретному на грани безумия — устойчивое предубеждение, преследующее математику более двух тысяч лет, — перевернули как раз труды Кантора. Предполагать, что ∞ свела Кантора с ума, — все равно что сокрушаться о том, что дракон одолел святого Георгия: не только неверно, но и обидно.

§ 1b. В одном Честертон был неправ, по меньшей мере — неточен. Указанная им опасность кроется не в логике как таковой. Логика — всего лишь один из методов, но не они сводят людей с ума. Честертон пытался описать одну из важнейших особенностей логики и математики в целом. Абстрактность. Абстракции.

Стоит начать с того, что такое абстракция. Пожалуй, именно это слово может послужить ключом к пониманию ценности достижений Кантора и его предшественников. С точки зрения грамматики, оно образовано от латинского абстрактус = *abstractus* = «отвлеченный», первичная лексема — прилагательное абстрактный. Оксфордский словарь предлагает девять его значений, нам больше всего подходит 4.a: «нематериальный, невещественный, неприменимый на практике, отделенный от частного. Антоним: конкретный». Представляют интерес варианты 4.b — «идеальный, сведенный к своей сущности», и 4.v — «трудный для понимания».

Карл Бойер, в области математики — историк уровня Гиббона⁶, писал: «Что же такое, в конце концов, целые числа? Каждому из нас понятно, что такое, например, число три, вернее, так нам кажется — до тех пор, пока не попробуем объяснить другому или дать четкое определение». Полезно понаблюдать, как учителя начальной школы знакомят детей с числами. Скажем, с числом 5. Сначала ребенку дают, к примеру, пять апельсинов — то, что можно потрогать, — и просят их посчитать. Затем картинку с изображением пяти апельсинов. Потом картинку с пятью апельсинами и

⁶ **ex3>** По вкладу в историю математики с Бойером может сравниться разве что Морис Клайн. Их главные работы в этой области — «История математики» Бойера (*C. Boyer, A History of Mathematics*) и «Математическая мысль от древности до наших дней» Клайна (*M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*). Обе книги отличаются доступностью и полнотой изложения, так что мы будем периодически к ним обращаться. (Эдуард Гиббон — известный британский историк, автор «Истории упадка и разрушения Римской империи». — Прим. пер.)

цифрой 5, чтобы показать их взаимосвязь. Наконец, цифра 5 остается без апельсинов. Во время устных упражнений дети начинают говорить о числе 5 самом по себе — как о сущности, не связанной с апельсинами. Другими словами, им морочат головы и постепенно подводят к тому, чтобы числа начали восприниматься не как символы, обозначающие наборы предметов, а как самостоятельные объекты. После этого можно переходить к арифметике, охватывающей элементарные операции и отношения между числами. (Обратите внимание на сходство с изучением языка: на первом этапе мы узнаем о том, что слово «пять» обозначает, или заменяет собой, число 5, и так далее.)

Как говорят учителя, бывает, счет дается тяжело. Иногда ребенок понимает, что «пять» означает 5, но ему требуется знать, 5 чего именно — 5 апельсинов, 5 монеток, 5 очков? Такие дети неплохо складывают и вычитают апельсины или монеты, но еле-еле справляются с арифметическими тестами. Им трудно воспринимать число 5 само по себе. Обычно их переводят на специальные образовательные программы, где вместо абстрактных чисел, «отделенных от частного», используются наборы реальных объектов⁷.

⁷ Б. Рассел посвятил любопытный абзац математике средней школы — переход к ней обычно сопровождается еще одним скачком уровня абстрактности после арифметики:

«При изучении алгебры вначале даже самый умный ребенок, как правило, сталкивается с большими трудностями. Буквы в формулах кажутся загадкой, добавленной лишь с целью усложнить задачу. Невероятно трудно отказаться от мысли, что каждая буква обозначает конкретное число, вот бы только учитель рассказал, какое. На уроках алгебры ум впервые сталкивается с истинами, которые применимы не только к конкретному случаю или предмету, а к любому из целой группы. Именно в способности понимать и обнаруживать такие истины и заключается власть разума над миром реального и возможного, и умение оперировать общими понятиями — один из тех плодов, которое должно приносить математическое образование».

Итак, нам подойдет следующее базовое определение «абстрактного» — «нечто, оторванное от конкретного, чувственного опыта или выходящее за его пределы». Именно такое значение вкладывается в этот термин в метафизике. А за каждой математической теорией на самом деле стоит некая метафизическая концепция. Отцом абстракции в математике считается Пифагор, а в метафизике — Платон.

Другие упомянутые словарные значения также заслуживают внимания. Не только потому, что современная математика крайне сложна и абстрактна, и иногда трудно без содрогания даже взглянуть на исписанную формулами страницу. В математике переход на уровень абстракций, или обобщение, соответствует сведению рассматриваемого к набору наиважнейших черт, самой сущности, подобной аннотации статьи или книги. При этом приходится размышлять о материях, о которых большинство людей предпочитают глубоко не задумываться — чтобы не сойти с ума.

Все это вам для разминки, а после нее будет не так уж и страшно. Вот еще две цитаты выдающихся ученых. Морис Клайн писал: «Величайшим вкладом древнегреческих философов в математику было осознание и распространение представления о том, что математические сущности — это абстракции, умозрительные идеи, отличные от физических объектов и их изображений». А Фердинанд де Соссюр предупреждал: «Философы и логики упустили из виду, что, как только система символов становится независимой от обозначаемых объектов, в ней начинают происходить непредсказуемые смещения смыслов».

Абстракции приносят всевозможные проблемы и головную боль, все мы об этом знаем. Причина неприятностей кроется отчасти в том, как мы используем слова. Мы воспринимаем их как обозначения. Каждое слово обозначает какой-то объект — человека, стол, ручку, Дэвида, голову, аспирин. Недопонимание, о каком именно реальном объекте идет речь, обыгрывается в разнообразных комедийных

сценках, таких как «Кто на первой базе?»⁸, и множестве диалогов из «Алисы в стране чудес»: «Взгляни-ка на дорогу! Кого ты там видишь?» — «Никого». — «Мне бы такое зрение! Увидеть Никого! Да еще на таком расстоянии!»⁹ Тем не менее становится уже не до смеха, когда дело доходит до абстрактных понятий — обобщенных концепций, не привязанных к конкретным предметам. Слова для их обозначения часто образованы от базовых глаголов. Например, «движение» или «существование» — мы используем подобные слова постоянно. Но вопрос о том, что именно они обозначают, приводит в замешательство. Похоже на замечание Бойера о числах. Что конкретно обозначают слова «движение» и «существование»? Несомненно, материальные объекты существуют, и иногда они движутся. Но существует ли движение само по себе? И в каком смысле? Что вообще подразумевается под существованием, если речь об абстракциях?

Последний вопрос и сам по себе довольно абстрактен. Возможно, здесь у вас понемногу начинает болеть голова. Абстрактные рассуждения часто сопровождаются смутной тревогой и беспокойством — вот такие как «Что есть существование?» или «Что конкретно мы имеем в виду, когда говорим о движении?». Но характерное внутреннее напряжение вызывает только переход на достаточно высокий уровень абстракции — идеализация имеет свои ступени, как возведение в степень или выход в новые измерения.

⁸ «Кто на первой базе?» — юмористическая сценка Бадда Эббота и Лу Костелло. Двусмысленность реплик и комедийный эффект обеспечиваются тем, что имена игроков в бейсбол совпадают с вопросительными словами: «Кто на первой базе?» «На первой базе Кто» и т. п. — Прим. пер.

⁹ Реплики приводятся в пер. с англ. Н. Л. Демуровой. Цит. по: Кэрролл Л. Приключения Алисы в стране чудес; Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в Зазеркалье. — М.: Наука, 1978. — 359 с. — Прим. пер.

Скажем, на первом уровне «человек» обозначает конкретного индивидуума; на втором — представителя нашего биологического вида; на третьем — что-то вроде «человечества» или «человечности», некий абстрактный критерий того, что можно назвать человеческим, и так далее. Размышления такого рода бывают непривычны и опасны. Переходить на высокий уровень абстрактности... доводилось каждому, кто неожиданно для себя сосредотачивался на случайно выбранном слове — взять хотя бы «ручку» — и повторял это слово снова и снова до тех пор, пока оно не теряло первоначальный смысл, и странность наименования предмета «ручкой» не начинала проступать в сознании подобно предчувствию эпилептического припадка.

Как вы знаете, современная аналитическая философия в основном занимается именно такими вопросами третьего и даже четвертого уровня абстрактности. Эпистемология = «Что есть знание?», метафизика = «Как соотносятся ментальные конструкторы и реальные физические объекты?» и т. п.¹⁰. Может статься, многочасовые размышления, которые (а) абстрактны, (б) сосредоточены на абстракциях или (в) и то и другое, приводят к тому, что у философов с математиками *eo ipso*¹¹ развиваются психические расстройства. Или наоборот: люди, предрасположенные к психическим болезням, более склонны к абстрактным рассуждениям. Классическая проблема курицы и яйца. Ясно одно. То, что человек любопытен от природы, жаждет отыскать истину и прежде всего

¹⁰ **exз>** Согласно большинству источников, Георг Кантор не ограничивался математикой — он разработал свою философию бесконечного, весьма оригинальную, квазирелигиозную и, как легко догадаться, крайне абстрактную. Во время работы в Галле-Виттенбергском университете он даже подавал прошение о переводе с математического факультета на философский, но руководство ему отказало. Нужно признать, в тот период его душевное состояние было довольно неустойчивым.

¹¹ Как следствие (*лат.*). — Прим. пер.

стремится *знать*, — чистая выдумка¹². Учитывая ощущения, сопровождающие познание, множество вещей мы на самом деле предпочитаем не знать. Доказательством тому служит несчетное число основополагающих вопросов, задумываться о которых мало кто любит.

Гипотеза: тревоги и опасности абстрактного мышления — главная причина стремления занять себя чем угодно и погрузиться в бесконечный поток стимулов. Чаще всего оно подстерегает нас в минуты тишины и покоя. Ранним утром вы просыпаетесь незадолго до звонка будильника и вдруг осознаете, что до сих пор каждое утро вставали не подвергая ни малейшему сомнению надежность пола под ногами. Лежа под одеялом, вы погружаетесь в размышления: теоретически, из-за небольшого дефекта конструкции или нарушения молекулярной целостности, пол может под вами провалиться или вы можете провалиться сквозь пол в результате квантового скачка. С точки зрения логики вроде бы ничто этому не противоречит. Разумеется, вы не серьезно рассматриваете грозящую вам опасность. Мысли всего лишь потекли в более абстрактном направлении, чем обычно, когда вы сосредоточены на предстоящих делах и заботах, ради которых и выбираетесь из постели. Может же такое случиться. Является ли уверенность в надежности пола по-настоящему обоснованной — вот над каким абстрактным вопросом вы раздумываете, продолжая лежать в кровати. Кажущийся очевидным утвердительный ответ основывается на том, что утро за утром вы опускали ноги на пол и уже тысячу раз — а скорее всего, уже больше десяти тысяч раз — он вас выдерживал. Настолько же оправдана уверенность в том, что завтра взойдет солнце, жена вспомнит, как вас зовут, а если вы чувствуете щекотание в носу и начинаете набирать воздух, то скоро чихнете, — это подтверждалось

¹² **ехз>** Этот вредоносный миф появился благодаря Аристотелю, своего рода главному антагонисту нашей истории, см. §2 ниже.

снова и снова. Задействованный принцип — по сути единственный для нас способ предсказать любые повторяющиеся явления, на которые мы рассчитываем автоматически, лишний раз не раздумывая. Из подобных событий и соткана повседневная жизнь, и без уверенности, опирающейся на прошлый опыт, мы сошли бы с ума или по меньшей мере не смогли бы нормально функционировать, поскольку пришлось бы останавливаться и обдумывать буквально каждый шаг. Привычная нам жизнь совершенно точно была бы невозможна без этой уверенности. И все же, является ли она обоснованной или всего лишь удобна?

Вот она, ступенчатая кривая абстрактного мышления, и вы только что поднялись на несколько уровней. Теперь вас занимают не только собственный вес и пол под ногами, не только уверенность в надежности пола, ее причины и важность для выживания. Вы задумались о наличии общего правила, закона или принципа, позволяющего обосновать безотчетную уверенность во всех бесчисленных случаях ее проявления, вместо того чтобы списать ее на цепочки рефлексов, толкающие вас вперед изо дня в день. Еще один признак абстрактного мышления: вы даже не пошевелились. Спокойно лежали на месте, но, кажется, потратили уйму сил и энергии. А все происходило у вас в голове. Странно до жути; неудивительно, что большинству такое не по душе. Зато становится понятно, почему в общепринятом представлении безумцы хватаются за голову и бьются ей о твердые предметы. Но те, кто учился в профильных классах, уже знают, что искомое правило существует, — оно называется принципом индукции (ПИ). На нем держится вся современная наука. Без принципа индукции успешные эксперименты не подтверждают гипотез — не может быть и речи о прогнозировании любого рода событий, неважно, с какой степенью достоверности. Никаких законов природы и научных открытий. ПИ утверждает, что, если в прошлом в определенных обстоятельствах n раз происходило