

В ПОМОЩЬ СТАРШЕКЛАССНИКУ



Т. А. КОЛЕСНИКОВА

МАТЕМАТИКА

НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК



МОСКВА
2024

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
К60

Макет подготовлен при содействии ООО «Айдиономикс»

Колесникова, Татьяна Александровна.

К60 Математика / Т. А. Колесникова. — Москва : Эксмо, 2025. — 192 с. —
(В помощь старшекласснику. Наглядный справочник).

ISBN 978-5-04-192857-5

В книге приводятся все основные темы школьного курса математики с 5 по 11 классы. Уникальная наглядная структура с активными полезными полями поможет оперативно найти и ознакомиться с необходимым материалом, повторить забытое и выучить новое.

Пособие содержит подробную информацию по теоретическим и практическим аспектам разделов «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики». Теоретические блоки сопровождаются примерами, схемами и таблицами для лучшей систематизации знаний и усвоения материала.

Наглядный справочник для старшеклассников станет незаменимым помощником при подготовке к урокам, текущим и итоговым формам контроля, а также будет полезен учителям при составлении планов занятий, контрольных работ и подготовке учащихся к ОГЭ и ЕГЭ.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-192857-5

© Колесникова Т. А., 2024
© ООО «Айдиономикс», 2024
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА	6
Числовые множества	6
Натуральные числа	7
Дроби	9
Целые и рациональные числа	20
Иррациональные и действительные числа	22
Вычисление и преобразование выражений	25
Тождественные преобразования	25
Многочлены	26
Алгебраические дроби	30
Иррациональные выражения	31
Логарифмические выражения	32
Тригонометрические выражения	35
Уравнения	38
Линейные уравнения	39
Квадратные уравнения	39
Рациональные уравнения	42
Иррациональные уравнения	43
Показательные уравнения	44
Логарифмические уравнения	45
Тригонометрические уравнения	47
Неравенства	52
Числовые неравенства и их свойства	52
Неравенства с одной переменной	54
Линейные неравенства	55
Метод интервалов	56
Квадратные неравенства	57
Рациональные неравенства	59
Иррациональные неравенства	60
Показательные неравенства	62
Логарифмические неравенства	62
Простейшие тригонометрические неравенства	66
Системы уравнений и неравенств	67
Системы уравнений с двумя неизвестными	67
Системы неравенств с одной неизвестной	70
Функции	71
Понятие функции. Способы задания функции	71
Преобразование графиков функций	71
Обратная функция	72
Свойства функции	73
Основные элементарные функции	77
Числовые последовательности. Прогрессии	83
Числовые последовательности	83

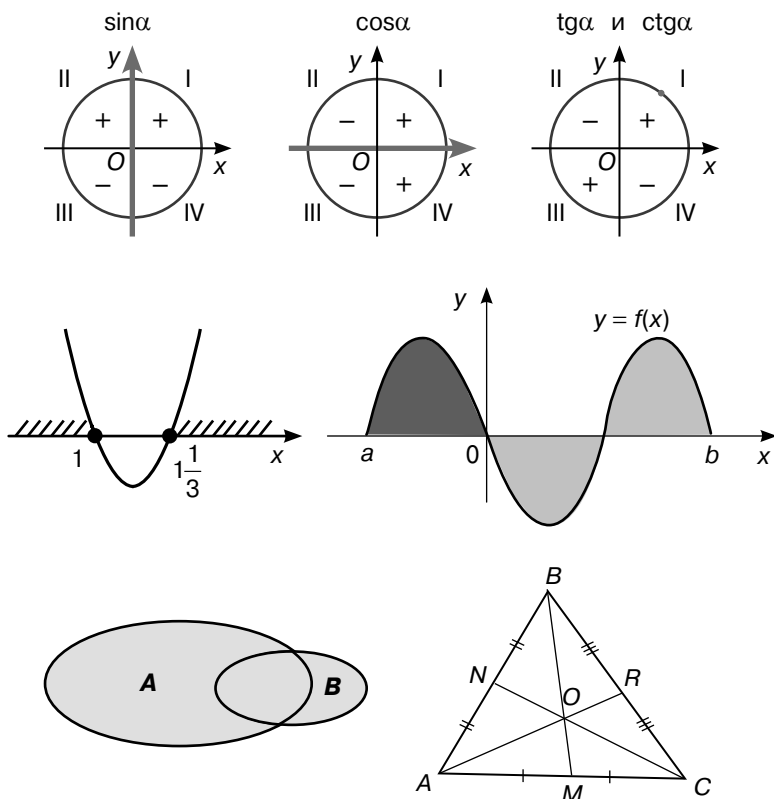
Прогрессии.....	84
Начала математического анализа.....	85
Производная.....	85
Первообразная и интеграл.....	97
Элементы теории множеств.....	108
Способы задания и виды множеств.....	109
Соотношения и операции над множествами.....	109
Свойства сложения и умножения множеств.....	112
ГЕОМЕТРИЯ.....	113
Планиметрия.....	113
Начальные геометрические сведения.....	113
Треугольники.....	117
Четырёхугольники.....	129
Многоугольники.....	134
Окружность и круг.....	134
Площади фигур.....	141
Правильные многоугольники.....	144
Векторы.....	145
Метод координат.....	149
Стереометрия.....	152
Введение в стереометрию.....	152
Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.....	154
Многогранники.....	161
Тела и поверхности вращения.....	169
Векторы в пространстве.....	175
Метод координат в пространстве.....	177
Подобные тела.....	181
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ.....	183
Элементы комбинаторики.....	183
Правила выбора элементов.	
Перестановки, размещения и сочетания.....	183
Элементы теории вероятностей.....	185
Случайные события и действия над ними.....	185
Элементы статистики.....	189
Категории и характеристики случайных величин.....	189

ВВЕДЕНИЕ

Перед вами справочник, который поможет обобщить, систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Теоретические блоки информации в пособии дополнены схемами и таблицами, проиллюстрированы примерами для лучшего запоминания и быстрого поиска материала. Книга содержит информацию по теоретическим и практическим аспектам разделов «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики».

Темы, представленные в пособии, соответствуют программе средней школы и включены в образовательный стандарт базового и профильного уровней, то есть присутствуют как в содержании государственного (итогового) контроля, так и в программах для поступающих в вузы.



АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА



Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа.

Множество натуральных чисел

Числа, которые используются при счёте предметов.

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \dots\}$$

Множество целых чисел

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (-1; -2; -3; -4; -5...), и число нуль.

$$Z = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots\}$$

Множество рациональных чисел

Числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (конечные или бесконечные периодические десятичные дроби). Обозначение: Q .

Множество иррациональных чисел

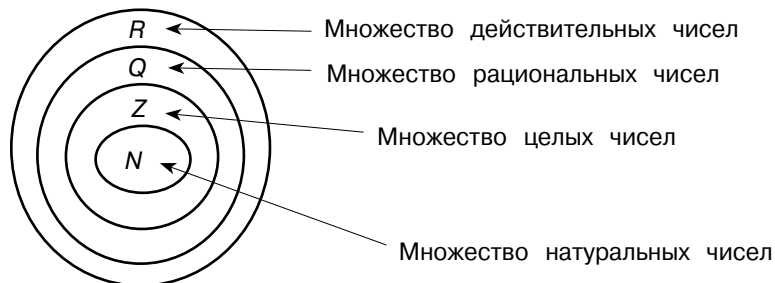
Числа, которые не могут быть представлены в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (бесконечные десятичные непериодические дроби). Обозначение: I .

Множество действительных чисел

Рациональные и иррациональные числа. Обозначение: R .

$$R = Q \cup I$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ





НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество натуральных чисел является бесконечным, т. к. для любого натурального числа n найдётся натуральное число больше, чем n .

Действия с натуральными числами

Сложение

$$a + b = c$$

↑ ↑ ↙
слагаемые сумма

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = a$$

Вычитание (действие, обратное сложению)

$$a - b = c$$

↑ ↘ ↙
уменьшаемое вычитаемое разность

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$$

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

$$a - 0 = a$$

$$a - a = 0$$

Умножение

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b \text{ слагаемых}$$

$$a \cdot b = c$$

↑ ↑ ↘
множители произведение

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot a = 0$$

Вариант обозначения: $a \times b$.

Деление (действие, обратное умножению)

$$a : b = c$$

↑ ↘ ↙
делимое делитель частное

$$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$$

$$a : (b : c) = (a : b) \cdot c$$

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

$$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$$

$$0 : a = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$a : a = 1$$

$$a : 1 = a$$

Варианты обозначения: $\frac{a}{b}$ или a/b .

- ◆ Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b .
- ◆ Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b .

Пример деления с остатком

◆ Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r , что $a = b \cdot q + r$ и $r < b$.

$$\begin{array}{r}
 70 \overline{) 323} \\
 \underline{60} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 1
 \end{array}$$

делитель: 3
 делимое: 70
 неполное частное: 23
 остаток: 1

Проверка: $70 = 3 \cdot 23 + 1$.



ВАЖНО

Остаток должен быть меньше делителя.

Возведение в степень с натуральным показателем

Выражение a^n называется **степенью числа a** .
 Вторая степень числа называется **квадратом числа**, третья степень — **кубом числа**.

показатель степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

n множителей

основание степени

Свойства степеней

$a^1 = a$	$(a^x)^y = a^{xy}$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$a^x \cdot b^x = (ab)^x$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$	
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$	

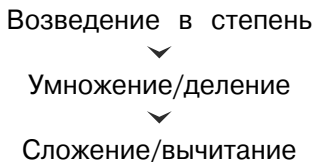
Порядок действий

Порядок действий

- ◆ Действия 1-й степени: сложение и вычитание.
- ◆ Действия 2-й степени: умножение и деление.
- ◆ Действия 3-й степени: возведение в степень.

Выражения без скобок

В выражении без скобок сначала выполняют действия большей степени. Если выражение содержит действия одной степени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо.



✓ Запись решения в строчку:

$$\begin{array}{l} \boxed{4 \ 1 \ 2 \ 5 \ 6 \ 3} \\ 17 - 5 \cdot 6 : 3 - 2 + 4 : 2 = 17 - 30 : 3 - 2 + 2 = 17 - 10 - 2 + 2 = \\ = 7 - 2 + 2 = 7. \end{array}$$

Выражения со скобками

В выражении со скобками сначала выполняют все действия в скобках, а затем действия большей степени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий.

Действия в скобках



Возведение в степень



Умножение/деление



Сложение/вычитание

✓ Запись решения по действиям:

$$\begin{array}{l} \boxed{1 \ 3 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6} \\ (3+1) \cdot 2 + 6^2 : 3 - 7 = 13. \end{array}$$

- 1) $3+1=4$;
- 2) $6^2=36$;
- 3) $4 \cdot 2=8$;
- 4) $36:3=12$;
- 5) $8+12=20$;
- 6) $20-7=13$.



ДРОБИ

Дробь — Форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

Обыкновенные дроби

Обыкновенная дробь — Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

$\frac{m}{n}$ ← числитель
 $\frac{m}{n}$ ← знаменатель

Правильная дробь — Обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, т. е. $m < n$.

Любая правильная дробь меньше единицы:

$$\frac{m}{n} < 1, \text{ если } m < n.$$

✓ Правильные дроби: $\frac{3}{8}$ ($3 < 8$); $\frac{1}{5}$ ($1 < 5$).

Неправильная дробь — Обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, т. е. $m \geq n$.

Любая неправильная дробь больше единицы или равна ей:

$$\frac{m}{n} \geq 1, \text{ если } m \geq n.$$



НА ЗАМЕТКУ

✓ Неправильные дроби:

$$\frac{8}{3} (8 > 3); \quad \frac{5}{5} (5 = 5).$$

✓ Представление натурального числа в виде неправильной дроби:

$$4 = \frac{4}{1} \quad \text{или} \quad 4 = \frac{8}{2}.$$

Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad c \neq 0$$

Сокращение дроби

Действие перехода к новой дроби, равной заданной, но с меньшими числителем и знаменателем.

Сократить дробь

Разделить числитель и знаменатель на их общий делитель, больший 1.

✓ $\frac{18}{26} = \frac{9}{13}$ (числитель и знаменатель дроби разделили на 2).

Сокращать дробь можно сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя либо несколько раз на общий делитель.

✓ Сократим дробь $\frac{140}{175}$.

Способ 1.

$$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7; \quad 175 = 5 \cdot 5 \cdot 7;$$
$$\text{НОД}(140; 175) = 5 \cdot 7 = 35.$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{140}{175} = \frac{140 : 35}{175 : 35} = \frac{4}{5}.$$

Способ 2.

$$\frac{140}{175} = \frac{140 : 5}{175 : 5} = \frac{28 : 7}{35 : 7} = \frac{4}{5}.$$

Несократимая дробь

Дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа.

Приведение дроби к новому знаменателю

Действие замены заданной дроби равной ей дробью, но с большими числителем и знаменателем. Используется при сложении, вычитании, сравнении дробей.

Смешанные числа

Смешанное число ● Число, содержащее целую и дробную части.

Представление неправильной дроби в виде смешанного числа ● Разделить числитель на знаменатель с остатком.

↓
Неполное частное — это целая часть, остаток от деления — числитель, знаменатель остаётся прежним.

$$\checkmark \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}, \text{ т. к. } 17 : 7 = 2 \text{ (ост. 3).}$$

Представление смешанного числа в виде неправильной дроби ● Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель — получится числитель неправильной дроби.

↓
Знаменатель остаётся прежним.

$$\checkmark 3\frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 11 + 5}{11} = \frac{38}{11}.$$

Сравнение обыкновенных дробей и смешанных чисел

Сравнение обыкновенных дробей ● ♦ Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой числитель больше.

$$\checkmark \frac{5}{12} > \frac{3}{12}, \text{ т. к. } 5 > 3.$$

♦ Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше.

$$\checkmark \frac{5}{9} > \frac{5}{11}, \text{ т. к. } 9 < 11.$$

Сравнение смешанных чисел ● ♦ Из двух смешанных чисел с разными целыми частями больше то число, у которого целая часть больше.

$$\checkmark 7\frac{3}{8} > 6\frac{9}{13}, \text{ т. к. } 7 > 6.$$

♦ Если целые части смешанных чисел равны, надо сравнить их дробные части по правилам сравнения обыкновенных дробей.

$$\checkmark 2\frac{3}{20} > 2\frac{1}{20}, \text{ т. к. } \frac{3}{20} > \frac{1}{20}.$$



НА ЗАМЕТКУ

Если у дробей разные знаменатели (числители), необходимо сначала с помощью основного свойства дроби привести их к одному знаменателю (числителю).

Арифметические действия с обыкновенными дробями и смешанными числами

Сложение обыкновенных дробей

Привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные.

Сложить числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить; если дробь неправильная — представить её в виде смешанного числа.

$$\checkmark \frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9}{30} + \frac{14}{30} = \frac{23}{30}.$$

$$\checkmark \frac{11}{15} + \frac{3}{10} = \frac{22}{30} + \frac{9}{30} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}.$$

Сложение смешанных чисел

Привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю.

Отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно — дробных.

Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, нужно выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

$$\checkmark 2\frac{3}{8} + 5\frac{5}{12} = 2\frac{9}{24} + 5\frac{10}{24} = 7\frac{19}{24}.$$

$$\checkmark 2\frac{7^{\wedge}2}{9} + 3\frac{5^{\wedge}3}{6} = 2\frac{14}{18} + 3\frac{15}{18} = 5\frac{29}{18} = 6\frac{11}{18}.$$

Вычитание обыкновенных дробей

Привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные.

Вычесть числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить.

$$\checkmark \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}.$$

$$\checkmark \frac{5}{7} - \frac{3}{14} = \frac{10}{14} - \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Вычитание смешанных чисел

Привести дробные части чисел к наименьшему общему знаменателю.

Отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно — дробных.

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, нужно превратить её в неправильную дробь, уменьшив целую часть на единицу.

$$\checkmark 3\frac{11}{12} - 2\frac{5}{6} = 3\frac{11}{12} - 2\frac{10}{12} = 1\frac{1}{12}.$$

$$\checkmark 9\frac{2}{7} - 3\frac{5}{7} = 8\frac{7+2}{7} - 3\frac{5}{7} = 8\frac{9}{7} - 3\frac{5}{7} = 5\frac{4}{7}.$$

$$\checkmark 9\frac{7}{15} - 2\frac{5}{6} = 9\frac{14}{30} - 2\frac{25}{30} = 8\frac{44}{30} - 2\frac{25}{30} = 6\frac{19}{30}.$$

Умножение обыкновенных дробей

Найти произведение числителей и произведение знаменателей данных дробей (произвести сокращение, если возможно):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Первое произведение записать как числитель, второе — как знаменатель.

Если получилась неправильная дробь, нужно представить её в виде смешанного числа.

$$\checkmark \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

$$\checkmark \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

$$\checkmark \frac{4}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{4 \cdot 35}{5 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Умножение смешанных чисел

Записать смешанные части в виде неправильных дробей.

Найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей.

Деление обыкновенных дробей

Первое произведение записать как числитель, второе — как знаменатель.

$$\checkmark 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{7 \cdot 30}{3 \cdot 7} = 10.$$

$$\checkmark 5\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{20} = \frac{16 \cdot 81}{3 \cdot 20} = \frac{4 \cdot 27}{1 \cdot 5} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}.$$

$$\checkmark 1\frac{2}{5} \cdot 4\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 32}{5 \cdot 7} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}.$$

Чтобы разделить одну обыкновенную дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

$$\checkmark \frac{8}{35} : \frac{4}{5} = \frac{8}{35} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{7}.$$

$$\checkmark \frac{4}{7} : \frac{8}{21} = \frac{4 \cdot 21}{7 \cdot 8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Деление смешанных чисел

Записать смешанные части в виде неправильных дробей.

$$\checkmark 7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{15}{2} : \frac{5}{2} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 3.$$

$$\checkmark 2\frac{3}{5} : 1\frac{6}{7} = \frac{13}{5} : \frac{13}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

Умножение (деление) на натуральное число

Чтобы выполнить умножение (деление) на натуральное число, это число можно представить в виде неправильной дроби со знаменателем 1:

$$n = \frac{n}{1}.$$

$$\checkmark \frac{3}{7} \cdot 14 = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{1} = \frac{3 \cdot 14}{7 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6.$$

$$\checkmark 2 : 1\frac{3}{5} = 2 : \frac{8}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25.$$

Десятичные дроби

Десятичная дробь

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде десятичной дроби.

