

7.6.5. Квантовый вентиль \mathbf{H}

Вентиль \mathbf{H} , или $\mathbf{H}^{\otimes 1}$, или вентиль Адамара, описывается матрицей

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

оперирующей в \mathbb{C}^2 .

Согласно матричному умножению:

$$\mathbf{H}|0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle; \quad \mathbf{H}|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle.$$

В силу линейности:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}|+\rangle &= \mathbf{H}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{H}|0\rangle + \mathbf{H}|1\rangle) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |1\rangle)\right) = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle + |0\rangle - |1\rangle) = |0\rangle \end{aligned}$$

и $\mathbf{H}|-\rangle = |1\rangle$.

Вентиль Адамара — один из наиболее используемых вентилях в квантовых вычислениях. Нередко \mathbf{H} является первым вентиляем, который применяется в схеме. Когда вы читаете «поместить кубит в суперпозицию», это обычно означает «взять кубит, инициализированный в состоянии $|0\rangle$, и применить к нему \mathbf{H} ».

Матрица Адамара — это изменение базисной матрицы с $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ на $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Поскольку $\mathbf{H}\mathbf{H} = I_2$, вентиль \mathbf{H} является обратным себе.

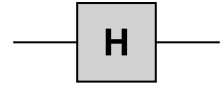


Математик Жак Адамар, 1865–1963. Фотография является общественным достоянием

ВОПРОС 7.6.6

Какова матрица 3×3 для вентиля **H** на сфере Блоха? Это произведение двух матриц вращения 3×3 . Каковы они?

Вентиль **H**, включенный в схему, показан справа.



В квантовых вычислениях болтается много нулей и единиц. Мы используем их интересными способами. Например, предположим, что у нас есть $|x\rangle$, где x — это либо 0, либо 1. Думая об x как о находящемся в \mathbb{Z} , посмотрим на выражения наподобие $(-1)^x$, которое равно 1 или -1 , когда x равно 0 или 1.

Для нашего вентиля **H** мы можем посмотреть на

$$\mathbf{H}|0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle); \quad \mathbf{H}|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |1\rangle)$$

и заметить, что

$$\mathbf{H}|u\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + (-1)^u |1\rangle),$$

когда u является одним из $\{0, 1\}$. Когда $u = 0$, мы имеем $|0\rangle$, которое приближается к $\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$, как и ожидалось. Для $u = 1$ мы завершаем с $\frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle - |1\rangle)$.

ВОПРОС 7.6.7

Покажите с помощью матричных вычислений, что $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{H}$.

Смена базиса с вычислительного базиса $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ на базис Адамара $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ меняет инверсию бита **X** на инверсию фазы **Z**.

ВОПРОС 7.6.8

Каким является $\mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{H}$?

7.6.6. Квантовый вентиль R_ϕ^z

Мы можем обобщить поведение вентиля **Z** по смене фаз, отметив:

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pi i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}, \text{ где } \phi = \pi.$$

Эта последняя форма является шаблоном для совокупности вентилей, которым дано имя \mathbf{R}_φ^z :

$$\mathbf{R}_\varphi^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}.$$

Эта совокупность является бесконечной, так как φ может принимать любое радианное значение, большее или равное 0 и меньшее 2π . Эти вентили меняют фазу состояния кубита на φ .

ВОПРОС 7.6.9

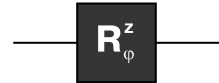
Какова матрица вращения 3×3 для \mathbf{R}_φ^z ? Для \mathbf{Z} ?

Инверсией вентиля \mathbf{R}_φ^z является $\mathbf{R}_{2\pi-\varphi}^z$.

$$\mathbf{R}_0^z = \mathbf{ID}.$$

$$\mathbf{R}_\pi^z = \mathbf{Z}.$$

Вентиль \mathbf{R}_φ^z , включенный в схему, показан справа для конкретного значения φ .



Альтернативной формой матрицы для \mathbf{R}_φ^z является

$$\mathbf{R}_\varphi^z = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)I_2 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)i\sigma_z$$

где I_2 — это матрица тождественности 2×2 , а σ_z — матрица \mathbf{Z} Паули.

Это то же самое, что и первая матрица, умноженная на $e^{-\frac{i\varphi}{2}}$. Мы можем сделать это, потому что $e^{-\frac{i\varphi}{2}}$ является комплексной единицей, и умножение на нее не наблюдается при измерении.

7.6.7. Квантовый вентиль \mathbf{S}

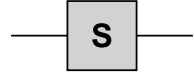
Вентиль \mathbf{S} — это укороченное обозначение для $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^z$. После его применения фаза корректируется так, чтобы она была больше или равна 0 и меньше 2π .

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi i}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

ВОПРОС 7.6.10

Какова матрица вращения 3×3 для вентиля \mathbf{S} ?

Вентиль \mathbf{S} , включенный в схему, показан справа.



Традиционно и довольно путано вентиль \mathbf{S} также называется вентилем $\pi/4$. Это происходит потому, что мы можем выразить матрицу таким образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}.$$

Единичный фактор $e^{i\pi/4}$ спереди не имеет наблюдаемого эффекта на квантовое состояние результата применения \mathbf{S} . Некоторые авторы называют \mathbf{S} фазовым вентилем, но не я.

7.6.8. Квантовый вентиль \mathbf{S}^\dagger

Вентиль \mathbf{S}^\dagger — это укороченное обозначение для $\mathbf{R}_{\frac{3\pi}{2}}^z = \mathbf{R}_{-\frac{\pi}{2}}^z$. После применения фаза корректируется так, чтобы она была больше или равна 0 и меньше 2π .

$$\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{R}_{\frac{3\pi}{2}}^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3\pi i}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Он так называется потому, что матрица для \mathbf{S}^\dagger является эрмитовым сопряжением матрицы \mathbf{S} .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

ВОПРОС 7.6.11

Какова матрица вращения 3×3 для вентиля \mathbf{S}^\dagger ?

Вентиль \mathbf{S}^\dagger , включенный в схему, показан справа.

