

А. А. СПЕКТОР, Л. Д. ВАЙТКЕНЕ,
И. Е. ГУСЕВ

**ВСЁ, ЧТО НУЖНО
ЗНАТЬ,
ЧТОБЫ НЕ БЫТЬ
СЛАБАКОМ
В МАТЕМАТИКЕ,
В ОДНОЙ БОЛЬШОЙ КНИГЕ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АСТ
2021

УДК 51
ББК 22.1
С71

Спектор, Анна Артуровна.

С71 Всё, что нужно знать, чтобы не быть слабаком в математике, в одной большой книге / А. А. Спектор, Л. Д. Вайткене, И. Е. Гусев. — Москва : Издательство АСТ, 2021. — 255, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-17-135263-9 (Полный курс средней школы).

ISBN 978-5-17-136666-7 (Всё, что должны знать образованные родители).

Эта книга-конспект — действительно уникальное издание, ведь здесь представлен практически весь базовый курс математики. Числа и дроби, основные операции с ними и секреты быстрого счета, пропорции и проценты, уравнения и функции, начала геометрии и стереометрии — все, что поможет вам освоить азы математики, содержится на этих страницах. Причем книга очень удобно оформлена: все понятия и важные правила выделены шрифтом или цветом, имеются поясняющие рисунки, схемы и таблицы. Материал подается коротко, но емко, предельно понятно и интересно — в сопровождении множества примеров и исторических фактов. А чтобы закрепить и проверить полученные знания, в конце каждого раздела есть блок с заданиями.

Для среднего и старшего школьного возраста.

УДК 51
ББК 22.1

**ISBN 978-5-17-135263-9 (Полный курс
средней школы)**

**ISBN 978-5-17-136666-7 (Всё, что должны
знать образованные родители)**

© Оформление, обложка, иллюстрации
ООО «Интеджер», 2021

© ООО «Издательство АСТ», 2021

В оформлении использованы материалы,
предоставленные Фотобанком Shutterstock, Inc.,
Shutterstock.com

В оформлении использованы материалы,
предоставленные Фотобанком Dreamstime, Inc.,
Dreamstime.com

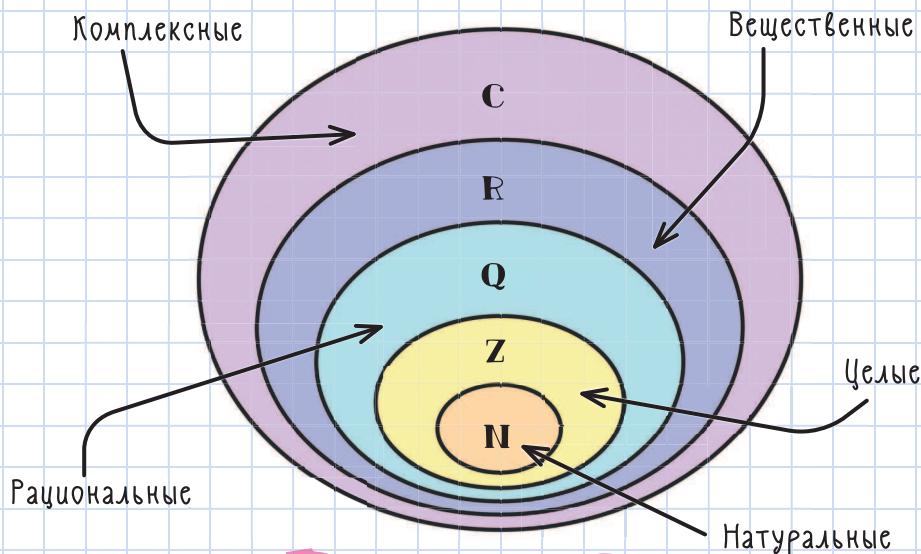
Содержание

Числа, цифры и системы счисления 4	Проценты 140
Множества чисел..... 4	Основные сведения..... 140
Системы счисления..... 7	Как перевести проценты в дроби
Нумерация и счетные единицы..... 16	и дроби в проценты?..... 144
Разряды и классы..... 18	Действия с процентами..... 146
Натуральные и целые числа 22	Как вычислить процентные
Натуральные числа	изменения?..... 152
и натуральный ряд..... 22	Подсчет процентов с помощью
Положительные	пропорции..... 158
и отрицательные числа..... 24	Алгебра 164
Целые числа..... 28	Общие сведения..... 164
Операции с целыми числами 32	Уравнения..... 166
Сложение целых чисел..... 32	Системы уравнений..... 168
Сложение чисел с помощью	Функции..... 170
числовой оси..... 35	Основы геометрии 174
Сложение отрицательных чисел..... 38	История геометрии..... 174
Вычитание целых положительных	Системы координат..... 185
чисел..... 40	Точка..... 189
Вычитание отрицательных чисел..... 44	Прямая..... 191
Умножение целых чисел..... 47	Луч..... 193
Деление целых чисел.	Отрезок..... 194
Признаки делимости..... 61	Ломаная..... 196
Среднее арифметическое..... 72	Угол..... 198
Округление целых чисел..... 74	Прямоугольник и трапеция..... 202
Дроби 80	Треугольник..... 204
Обыкновенные дроби..... 80	Окружность и круг..... 208
Сложение дробей..... 88	Многоугольники..... 210
Вычитание дробей..... 90	Правильные многоугольники
Умножение дробей..... 93	в природе и архитектуре..... 212
Десятичные дроби. Общие сведения..... 98	Симметрия..... 214
Сложение десятичных дробей..... 101	Периметр..... 217
Вычитание десятичных дробей..... 104	Площадь..... 222
Умножение десятичных дробей..... 107	Теорема Пифагора..... 228
Деление десятичных дробей..... 110	Применения и приложения
Сравнение десятичных дробей..... 115	теоремы Пифагора..... 232
Округление десятичных дробей..... 117	Стереометрия 236
Отношение чисел и пропорции 122	Аналогии в геометрии..... 236
Отношение чисел..... 122	Теорема Пифагора
Пропорции. Основные сведения..... 125	в пространстве..... 240
Пропорции и решение задач..... 128	Закон Эйлера для многогранников..... 243
Прямая и обратная	Пять платоновых тел..... 244
пропорциональная зависимость..... 131	Полуправильные многогранники..... 248
Пропорции и рисунки в масштабе..... 136	От античности к будущему..... 252

Числа, цифры и системы счисления

Множества чисел

Число – это одно из основных понятий математики. Оно используется для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей. Знак для обозначения числа называется цифрой. Мы сначала представим все разновидности чисел, а на следующих страницах расскажем о них подробно.



Иерархия чисел.

$$z = a + bi$$

z – Комплексное число
 a – Действительная часть
 b – Мнимая часть

Натуральные числа. Натуральные буквально означает «естественные». С их помощью подсчитываются отдельные предметы и объекты – люди, животные, звезды.

Целые числа – это все натуральные числа, числа, противоположные им по знаку (отрицательные), и ноль. Таким образом, натуральные числа оказываются частным случаем целых.

Рациональные числа – это числа, которые можно представить обыкновенной дробью, где числитель – целое число, а знаменатель – натуральное. Если рациональное число положительное, а его знаменатель равен единице, то получается целое натуральное число. Значит, натуральные числа, как и все целые, – частный случай рациональных.

Вещественные, или действительные, числа – это все положительные, отрицательные числа и ноль. Они могут быть целыми и дробными, рациональными и иррациональными. Таким образом, натуральные числа, как и целые числа, – частные случаи вещественных (действительных).

ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО – это вещественное число, которое не может быть представлено в виде обыкновенной дроби, где числитель и знаменатель – целые числа. Иррациональное число изображается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, число π как раз является иррациональным числом.

Комплексное число – это выражение вида $a + bi$, где a , b – действительные числа, а i – мнимая единица, или квадратный корень из -1 . Число a называется действительной частью, а bi – мнимой частью комплексного числа $z = a + bi$. Таким образом, вещественные (действительные) числа – частный случай комплексных чисел.

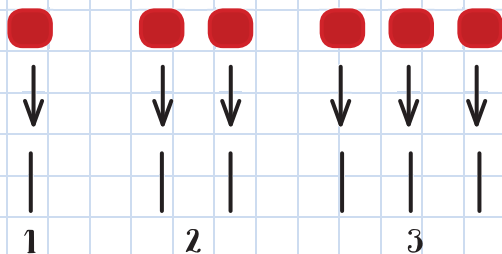
Комплексные числа используются в картографии, физике и особенно важны при описании мира элементарных частиц.

Системы счисления

Способы записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций, называются системами счисления.

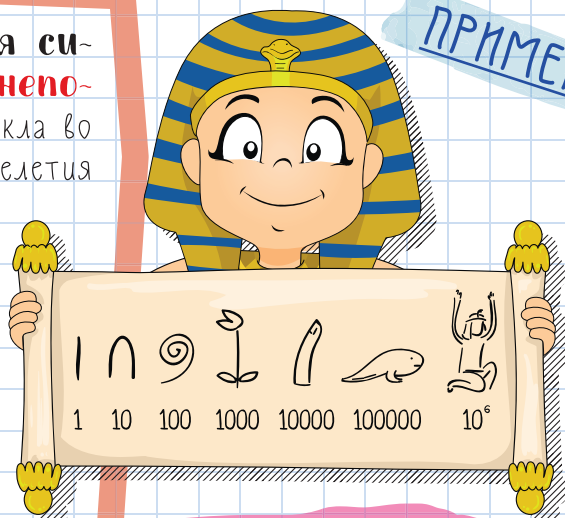
Системы счисления подразделяются на **непозиционные**, **позиционные** и **смешанные**. В позиционных системах значение одной и той же цифры зависит от места в записи числа, то есть разряда. В непозиционных системах счисления значение цифры не зависит от положения в записи числа.

Единичная (унарная, разовая) система счисления – разумеется, **непозиционная**, так как количество выражается путем повторения одного и того же знака. Как правило, в качестве такого знака используются точки или вертикальные линии. Преимущество этой системы – ее простота, а очевидные недостатки – необходимость записывать огромное количество знаков и сложность последующего прочтения такого большого числа.



Несмотря на очевидную примитивность, элементы единичной системы счисления и метод группировки нашли широкое применение в статистике.

Древнеегипетская система счисления – непозиционная. Она возникла во второй половине III тысячелетия до н. э. Цифрами древнеегипетской системы были специальные иероглифы, обозначающие числа 1, 10, 100, 1000 и т. д. Числа записывались путем повторения цифр, причем каждая из них могла использоваться от 1 до 9 раз.



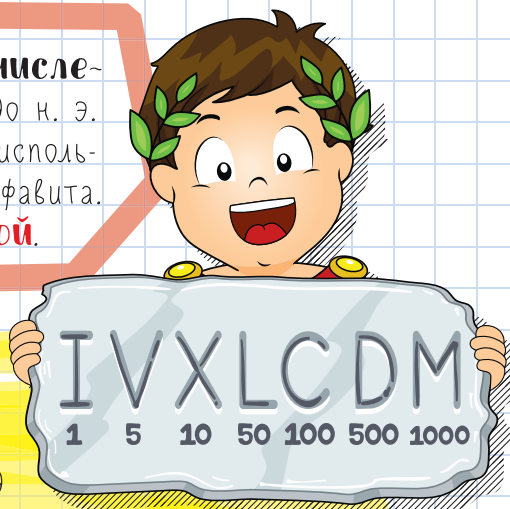
၇၇၇၇၇၈၈၈၈၈၈၈၈

A 3x5 grid of dots forming the number 99999. The top row has 5 dots, the middle row has 4 dots, and the bottom row has 3 dots.

Число 543

Запомните!

Римская система счисления появилась около 500 г. до н. э. Для обозначения цифр в ней использовались буквы латинского алфавита. Она является **непозиционной**.



Число 4 записывают не четырьмя палочками, а в виде IV. Меньшая цифра стоит перед большей – это означает, что единицу не прибавляют к пятерке, а отнимают от нее. Так же записывают числа 9 – IX, 40 – XL, 90 – XC и т. д.

1	I	16	XVI	90	XC
2	II	17	XVII	100	C
3	III	18	XVIII	200	CC
4	IV	19	XIX	300	CCC
5	V	20	XX	400	CD
6	VI	21	XXI	500	D
7	VII	22	XXII	600	DC
8	VIII	23	XXIII	700	DCC
9	IX	24	XXIV	800	DCCC
10	X	30	XXX	900	CM
11	XI	40	XL	1000	M
12	XII	50	L	2000	MM
13	XIII	60	LX	3000	MMM
14	XIV	70	LXX	4000	M $\overline{V}$
15	XV	80	LXXX	5000	M $\overline{V}$
		10000	X $\overline{10}$		

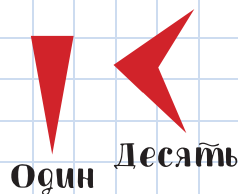
Римские числа от единицы до 10 000.

Важно!

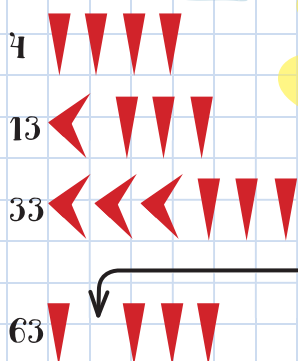
Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием. Основание позиционной системы счисления — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления. Например, в двоичной системе используется только два символа: 1 и 0, в десятичной системе — 10, от 0 до 9.

Шестидесятеричная система счисления была изобретена шумерами в Древней Месопотамии в 3000 г. до н. э. Ее восприняли вавилоняне. В данной системе использовались два символа в виде клина, означавшие единицы и десятки. Вертикальный клин означал единицы, а горизонтальный — десятки.

ПРИМЕР



ПРИМЕР

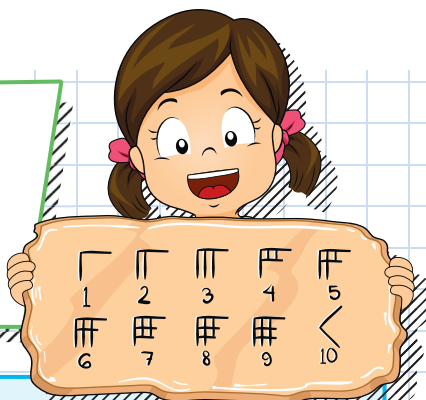


В вавилонской шестидесятеричной системе счисления числа от 1 до 59 записывались в непозиционной десятичной системе счисления, а начиная с 60 — в позиционной.

Расстояние между символами.
Если бы между символами отсутствовало расстояние, то данная запись означала бы число 4.

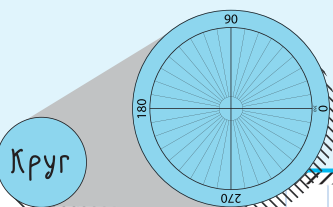
Важно!

Вавилонская шестидесятеричная система — древнейшая позиционная система в мире.



Это интересно

Древняя шестидесятеричная система не осталась в прошлом. Именно благодаря шумерам и вавилонянам окружность сегодня делится на 360 градусов, час — на 60 минут, а минута, на 60 секунд.

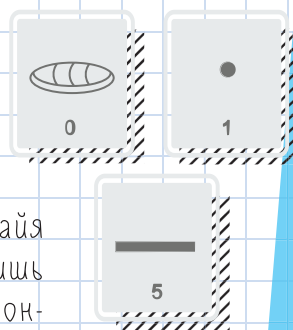


Шестидесятеричную систему счисления использовали древние и средневековые астрономы, в основном для представления дробей. Поэтому в Средневековье шестидесятеричные дроби называли «астрономическими». Они применялись для записи астрономических координат — углов, и эта традиция существует и сегодня. Кроме того, шестидесятеричная система используется для определения географических координат на Земле.

Важно!

Первый шестидесятеричный знак после запятой называется минута ('), второй — секунда ("). Название «минута» происходит от слова «минимум» и означает «малая часть», а «секунда» означает «вторая часть».

Система счисления у цивилизации майя возникла приблизительно в III в. н. э. Она является позиционной. В основу своей системы майя положили число 20, поэтому она также является двадцатеричной. Для записи любого числа майя использовали 20 цифр, включающие в себя лишь три символа: точку для обозначения 1, горизонтальную линию для 5 и ракушку для 0.



Майя записывали числа вертикально – снизу вверх. При этом верхние символы считались старшими, а самая нижняя позиция соответствовала разряду единиц. Число 20 считалось единицей второго разряда, а третий разряд образовывался не двадцатками, т. е. не был кратным числу 400, а восемнадцатками, т. е. был кратным числу 360. Объясняется это тем, что майя делили год на 18 месяцев по 20 дней в каждом и плюс дополнительные пять дней. Единицы же следующих разрядов вновь равнялись 20 единицам предшествующего разряда. Поэтому разряды системы майя можно представить в следующем виде: 1, 20, 20×18 , $20^2 \times 18$, $20^3 \times 18$...



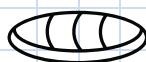
Важно!

Арифметические действия у майя были предназначены для календарных расчетов. Когда производились расчеты, связанные с календарем майя, жрецы прибегали к помощи «таблицы умножения». Она включала в себя перемножение чисел 13, 52, 65, 78 и 91. Так как у майя не существовало понятия дробей, они всегда старались достичь циклов, состоящих из целых чисел.

ПРИМЕР

Число 100 в записи майя будет выглядеть так:

 Разряд двадцаток

 Разряд единиц

$$\text{т.е. } 0 \times 1 + 5 \times 20 = 0 + 100 = 100.$$

Число 1807 будет выглядеть так:

 Разряд 20×18

 Разряд двадцаток

 Разряд единиц

$$\begin{aligned} \text{т.е. } 5 \times 20 \times 18 + 0 \times 20 + 7 &= \\ = 5 \times 360 + 0 + 7 &= 1800 + 7 = \\ = 1807. \end{aligned}$$

Это интересно

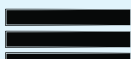
Самое большое число, найденное в памятниках культуры майя, выглядит следующим образом:

 $9 \times (18 \times 20^4) +$

 $6 \times (18 \times 20^3) +$

 $14 \times (18 \times 20^2) +$

 $13 \times (18 \times 20) +$

 $15 \times 20 +$

 1

26 889 781

В **индо-арабской системе счисления** для записи абсолютно всех чисел используются 10 основных символов, или цифр, в различных комбинациях. Это цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Индо-арабская позиционная десятичная система счисления, которой мы пользуемся сегодня, возникла в Индии около V в. н. э., была воспринята арабами, и потому мы сегодня называем привычные нам числа арабскими, хотя на самом деле они индийские.

В этой системе легко считать группами по 10 символов, т. е. десятками. При этом 10 десятков заменяют одной сотней, 10 сотен – тысячей и т. д.

Значение каждой цифры в индо-арабской записи определяется ее разрядом, то есть местом в последовательности цифр, которые образуют эту запись, при этом читать нужно слева направо. Например, в последовательности символов 2538 цифра 2 означает две тысячи, цифра 5 – пять сотен, цифра 3 – три десятка и цифра 8 – восемь единиц.

Каждое число индо-арабской системы счисления можно представить в виде суммы множителей. **Например:**
$$8364 = 8 \times 1000 + 3 \times 100 + 6 \times 10 + 4.$$

Важно!

В давние времена самым простым приспособлением для счета предметов являлись пальцы. Издавна люди ходили босиком, поэтому могли использовать для счета пальцы не только рук, но и ног, а это расширяло возможности счета за пределы десяти. Люди фактически пользовались двадцатеричной системой счисления.



Кипу – узелковый
счет инков.

Это интересно

В разных странах мира, кроме пальцев, использовали веревочные счеты с узелками, и, например, инки для запоминания чисел задействовали шнуры разных цветов с завязанными на них узлами.