

где a_n — n -й член арифметической прогрессии;
 d — разность прогрессии.

Сумма членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2} = \frac{[2a_1 + (n - 1) d] n}{2}.$$

Если $d > 0$, то прогрессия возрастающая; если
 $d < 0$, то прогрессия убывающая.

Геометрическая прогрессия

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q;$$

$$a_2 = a_1 q;$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2;$$

⋮

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

где a_n — n -й член геометрической прогрессии;
 q — знаменатель прогрессии.

Сумма членов геометрической прогрессии

для прогрессии возрастающей

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

для прогрессии убывающей

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

для прогрессии бесконечно убывающей

$$S_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{a_1}{1 - q}.$$

Если $q > 1$, то прогрессия возрастающая; если $q < 1$, то прогрессия убывающая; если $q < 0$, то прогрессия знакопеременная.

7. Логарифмы

Определение

$$\log_b N = x; \quad b^x = N,$$

где x — логарифм; $b > 0$ — основание логарифма; N — число.

Из определения логарифма следует:

$$\log_a 1 = 0, \text{ так как } a^0 = 1;$$

$$\log_a a = 1, \text{ так как } a^1 = a;$$

$$\log_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{при } a > 1; \\ +\infty & \text{при } a < 1. \end{cases}$$

Свойства

$$\log_b (mn) = \log_b m + \log_b n;$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n;$$

$$\log_b m^n = n \log_b m;$$

$$\log_b \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log_b m.$$

Десятичные логарифмы

$$\log_{10} N = \lg N.$$

Натуральные логарифмы

$$\log_e N = \ln N;$$

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 2,71828182 \dots$$

Переход от одной системы логарифмов к другой

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N = \frac{1}{\log_b a} \log_b N.$$

Модуль перехода от системы логарифмов с основанием b к системе с основанием a

$$M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Переход от натуральных логарифмов к десятичным и обратный переход

$$\lg N = \frac{1}{\ln 10} \ln N \approx 0,434294 \ln N,$$

$$M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e,$$

$$\ln N = \frac{1}{\lg e} \lg N \approx 2,302585 \lg N,$$

$$M = \frac{1}{\lg e} = \ln 10.$$

8. Теория соединений. Бином Ньютона

Число размещений из m элементов по n в каждом

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1).$$

Число перестановок из n элементов

$$P_n = A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n = n!.$$

Число сочетаний из m элементов по n в каждом

$$\begin{aligned} C_m^n &= \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n} = \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!}. \end{aligned}$$

Формула замены

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Замена выгодна, если $m-n < n$.

Бином Ньютона

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \\ &+ C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + \\ &+ C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \\ &+ \dots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Формула члена разложения вида $(a + b)^n$

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m.$$

III. ГЕОМЕТРИЯ

А. ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ

1. Равносторонний треугольник

c — сторона;
 h — высота;
 S — площадь.

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{3}h \approx 1,154h;$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} c \approx 0,866c;$$

$$S = \frac{c^2 \sqrt{3}}{4} \approx 0,433c^2;$$

$$S = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3} \approx 0,577h^2.$$

2. Прямоугольный треугольник (рис. 2)

a , b — катеты;
 c — гипотенуза;
 α , β — острые углы;

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ;$$

S — площадь.

$$S = \frac{ab}{2}.$$

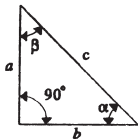


Рис. 2.

3. Квадрат

c — сторона;
 d — диагональ;
 S — площадь.

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2} d \approx 0,707d;$$

$$d = \sqrt{2} c \approx 1,414c;$$

$$S = \frac{d^2}{2} = c^2.$$

4. Прямоугольник и параллелограмм

b — основание;
 h — высота;
 S — площадь.

$$S = bh.$$

5. Ромб

c — сторона;
 D — большая диагональ;
 d — малая диагональ;
 S — площадь.

$$S = \frac{dD}{2}.$$

Если острые углы равны 60° , то $c = d$ и

$$S = \frac{c^2 \sqrt{3}}{2} \approx 0,866c^2.$$

6. Трапеция

a, b — параллельные стороны, или основания;
 h — высота;
 S — площадь.

$$S = \frac{a + b}{2} h.$$

7. Правильный n -угольник

Внешний угол равен $\frac{360^\circ}{n}$;

внутренний угол равен $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$;

c — сторона;

a — апофема (перпендикуляр, проведенный из центра многоугольника к стороне);

S — площадь.

$$S = \frac{ca}{2} n.$$

8. Сторона a_n правильного вписанного и сторона b_n правильного описанного многоугольника (рис. 3)

r — радиус окружности.

$$a_n = 2r \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$b_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$