

Н. Н. Удалова

МАТЕМАТИКА

НАГЛЯДНЫЙ ШКОЛЬНЫЙ КУРС:



УДК 373:51
ББК 22.1я721
У28

Макет подготовлен при содействии ООО «Айдиономикс»

Удалова, Наталья Николаевна.
У28 Математика / Н. Н. Удалова. — Москва : Эксмо, 2026. —
192 с. — (Наглядный школьный курс: удобно и понятно).

ISBN 978-5-699-92620-6

В пособии в наглядной и доступной форме приводятся теоретические сведения за весь школьный курс математики, формулы, законы и понятия.




Издание окажет помощь старшеклассникам при подготовке к урокам, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к экзаменам.

**УДК 373:51
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-699-92620-6

© Удалова Н.Н., 2017
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5	Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.....	52
 АЛГЕБРА	6	Основные приёмы решения систем уравнений	53
Числа, корни и степени.....	6	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений.....	54
Целые числа	6	Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем.....	55
Степень с натуральным показателем.....	6	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики	57
Дроби.....	8	Неравенства.....	59
Проценты	10	Квадратные неравенства.....	59
Рациональные числа	10	Рациональные неравенства.....	62
Степень с целым показателем.....	11	Показательные неравенства.....	64
Корень степени $n > 1$ и его свойства.....	12	Логарифмические неравенства.....	66
Степень с рациональным показателем и её свойства.....	12	Системы линейных неравенств.....	69
Свойства степени с действительным показателем.....	13	Системы неравенств с одной переменной	70
Основы тригонометрии	14	Равносильность неравенств и систем неравенств.....	71
Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла.....	14	Использование свойств и графиков функций при решении неравенств.....	72
Радианная мера угла	15	Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.....	74
Синус, косинус, тангенс, котангенс числа	16	 ФУНКЦИИ	75
Основные тригонометрические тождества.....	17	Определение и график функции.....	75
Формулы приведения	18	Функция, область определения функции.....	75
Синус, косинус, тангенс и котангенс суммы и разности двух углов	19	Множество значений функции	76
Синус и косинус двойного угла.....	20	График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях	76
Логарифмы	21	Обратная функция. График обратной функции	77
Логарифм числа.....	21	Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат	78
Логарифм произведения, частного, степени	22	Элементарное исследование функций.....	80
Десятичный и натуральный логарифмы, число e	23	Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания	80
Преобразование выражений	24	Чётность и нечётность функции.....	81
Преобразование выражений, включающих арифметические операции.....	24	Периодичность функции.....	82
Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень.....	27	Ограниченность функции	83
Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени	29	Точки экстремума	83
Преобразование тригонометрических выражений	31	Наибольшее и наименьшее значение функции	84
Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования.....	34	Основные элементарные функции	85
Модуль числа.....	35	Линейная функция и её график.....	85
 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	37	Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график.....	87
Уравнения	37	Квадратичная функция, её график.....	88
Квадратные уравнения.....	37		
Рациональные уравнения.....	39		
Иррациональные уравнения.....	43		
Тригонометрические уравнения.....	44		
Показательные уравнения.....	49		
Логарифмические уравнения.....	49		
Равносильность уравнений и систем уравнений	51		

Степенная функция с натуральным показателем, её график.....	90	Перпендикулярность плоскостей	138
Тригонометрические функции и их графики.....	91	Параллельное проектирование	139
Показательная функция, её график	95	Многогранники.....	141
Логарифмическая функция, её график	96	Призма.....	142
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	97	Параллелепипед. Куб. Симметрия	143
Производная	97	Пирамида.....	145
Понятие о производной, геометрический смысл производной	97	Сечения.....	146
Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.....	101	Правильные многогранники	149
Уравнение касательной к графику функции	101	Тела и поверхности вращения	150
Производные основных элементарных функций	102	Цилиндр.....	150
Правила дифференцирования.....	103	Конус	152
Вторая производная и её физический смысл.....	104	Шар, сфера и их сечения	154
Исследование функций.....	105	Измерения геометрических фигур	156
Применение производной к исследованию функций	105	Угол.....	156
Построение графиков функций с помощью производной	111	Углы в пространстве	159
Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.....	114	Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника.....	163
Первообразная и интеграл.....	115	Расстояние.....	164
Первообразная элементарных функций.....	115	Площади	168
Примеры применения интеграла в физике и геометрии.....	119	Объёмы.....	171
ГЕОМЕТРИЯ.....	122	Координаты и векторы.....	173
Планиметрия	122	Координаты на прямой	173
Треугольник	122	Расстояние между двумя точками	176
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	126	Понятие вектора	176
Трапеция.....	128	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.....	178
Окружность и круг.....	129	Разложение вектора по трём некопланарным векторам.....	179
Вписанная и описанная окружности	130	Координаты вектора	179
Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника.....	132	Скалярное произведение векторов.....	180
Правильные многоугольники.....	132	ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	186
Прямые и плоскости в пространстве	133	Элементы комбинаторики	186
Прямые в пространстве	133	Поочерёдный и одновременный выбор.....	186
Параллельность прямой и плоскости.....	134	Формулы числа сочетаний и перестановок.....	187
Параллельность плоскостей.....	135	Бином Ньютона.....	187
Перпендикулярность прямой и плоскости	136	Элементы статистики.....	188
		Табличное и графическое представление данных	188
		Числовые характеристики рядов данных.....	188
		Элементы теории вероятностей.....	189
		Вероятности событий.....	189
		Использование вероятности и статистики при решении прикладных задач.....	191

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для систематизации и закрепления знаний учащихся по математике за курс средней школы.

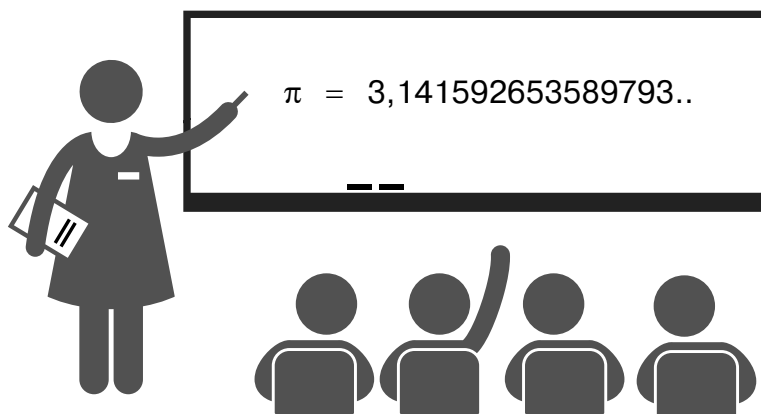
Книга содержит все изучаемые определения, правила, формулы, теоремы из курсов арифметики, алгебры, геометрии, начал математического анализа, комбинаторики, теории вероятностей и статистики. Представленный материал упорядочен и систематизирован, что поможет быстро сориентироваться и получить необходимую информацию.

Пособие будет полезно выпускникам для самостоятельной подготовки к единому государственному экзамену, так как обобщающий курс изложен последовательно от простого к сложному. В книге содержится дополнительный материал, необходимый для успешной сдачи ЕГЭ. Он включает метод рационализации, применяемый при решении неравенств, и координатный метод, используемый при решении стереометрических задач.

Теоретический материал иллюстрируют примеры с развёрнутым разъяснением, которые позволяют детально разобраться в темах школьного курса.

Издание, безусловно, поможет учащимся старших классов при подготовке к занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также сдаче единого государственного экзамена.

Желаем успехов!



АЛГЕБРА

ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ



В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.



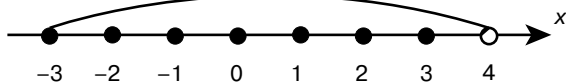
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (-1; -2; -3; -4; -5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

Множество натуральных (от лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — N ; множество целых (нем. *zahl* — число) чисел — Z .

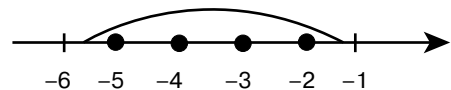
Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих условию:

а) $x \in [-3; 4)$;



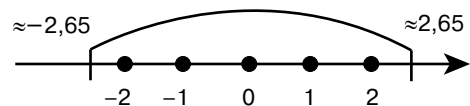
Ответ: 7.

б) $-5,6 < m \leq -1,3$.



Ответ: 4.

Множество чисел задано формулой $x_n = n^2 - 5$, где $n \in Z$. Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$n^2 - 5 \leq 2, n^2 \leq 7, -\sqrt{7} \leq n \leq \sqrt{7}$.

Ответ: 5.



СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a .
Например:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$;

$0,2^6 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,000064$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

a — основание степени
 n — показатель степени



Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства степеней

$$a^1 = a$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ где } a \neq 0$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ где } b \neq 0$$



При чётной степени

$$a, b > 0$$

$$(-a)^n = b \quad -a^n = -b$$

$$(-3)^4 = 81 \quad -3^4 = -81$$

Таблица степеней

a^n	Значения n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125	15 625				
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656				
7^n	7	49	343	2401	16 807					
8^n	8	64	512	4096	32 768					
9^n	9	81	729	6561	59 049					



Если в основании отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...):

$$(-3)^4 = 81.$$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...):

$$(-2)^5 = -32.$$



ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, называют **обыкновенной дробью**.

$\frac{m}{n}$	←	числитель
n	←	знаменатель

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.
Например:

$$\frac{3}{10} = 0,3; \quad \frac{3}{100} = 0,03;$$

$$2\frac{3}{1000} = 2,003; \quad \frac{-7}{100} = -0,07.$$

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от 0, то получится дробь, равная данной.

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, где $c \neq 0$
--

Например:

$$\frac{0,35}{0,4} = \frac{0,35 \cdot 100}{0,4 \cdot 100} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}.$$

ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} \qquad \frac{-17}{3} = -\frac{14}{3} - \frac{1}{3} = -5\frac{2}{3}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\frac{17}{8} = 2,125; \qquad \frac{-17}{8} = -2,125$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12; \qquad \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375.$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{32}{9}.$$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:

- 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
- 2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных частей.

- Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.
- Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

а) $2\frac{7^2}{9} + 3\frac{5^3}{6} = 2\frac{14}{18} + 3\frac{15}{18} = 5\frac{29}{18} = 6\frac{11}{18};$
б) $9\frac{7^2}{15} - 2\frac{5^5}{6} = 9\frac{14}{30} - 2\frac{25}{30} = 8\frac{44}{30} - 2\frac{25}{30} = 6\frac{19}{30}.$



Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:

- 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
- 2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
- 3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

$$\text{✎ } 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{7 \cdot 30}{3 \cdot 7} = 10.$$

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:

- 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
- 2) делимое умножить на число, обратное делителю.

$$\text{✎ а) } 2\frac{3}{5} : 1\frac{6}{7} = \frac{13}{5} : \frac{13}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5};$$

$$\text{б) } \frac{3}{7} : 14 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{98};$$

$$\text{в) } 2 : 1\frac{3}{5} = 2 : \frac{8}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25.$$

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:

- 1) уравнивать в этих дробях количество знаков после запятой;
- 2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
- 3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
- 4) поставить в ответе запятую под запятой.

$$\text{✎ а) } 2,35 + 11,7 = 14,05; \quad \begin{array}{r} 11,70 \\ + 2,35 \\ \hline 14,05 \end{array}$$

$$\text{б) } 12 - 10,346 = 1,654. \quad \begin{array}{r} 12,000 \\ - 10,346 \\ \hline 1,654 \end{array}$$

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:

- 1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
- 2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

$$\text{✎ } 3,25 \cdot 2,8 = 9,100 = 9,1.$$

$$\begin{array}{r} \times 3,25 \\ 2,8 \\ \hline 2600 \\ + 650 \\ \hline 9,100 \end{array}$$

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:

- 1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
- 2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

$$\text{✎ а) } 70,15 : 23 = 3,05; \quad \begin{array}{r} 70,15 \quad | \quad 23 \\ - 69 \\ \hline 115 \\ - 115 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{б) } 36 : 25 = 1,44. \quad \begin{array}{r} 36 \quad | \quad 25 \\ - 25 \\ \hline 110 \\ - 100 \\ \hline 100 \\ - 100 \\ \hline 0 \end{array}$$

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:

- 1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
- 2) после этого выполнить деление на натуральное число.

$$\text{✎ а) } 25,6 : 0,08 = 2560 : 8 = 320;$$

$$\text{б) } 12,35 : 2,5 = 123,5 : 25 = 4,94.$$



ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$100\% = 1$$

$$3\% = 0,03$$

$$0,2 = 20\%$$

$$(3:100)$$

$$(0,2 \cdot 100)$$

Шуба на распродаже со скидкой 30% стоит 77 000 рублей. Какова была стоимость шубы без скидки?

Решение.

77 000 руб.	100% - 30% = 70%
x руб.	100%

$$\frac{77\,000}{x} = \frac{70}{100}; \quad x = \frac{77\,000 \cdot 100}{70} =$$

= 110 000 (руб.) — цена шубы до распродажи.

Ответ: 110 000.

Магазин закупает чашки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких чашек можно купить в этом магазине на 900 рублей? >>>

>>>

Решение.

120 руб.	100%
x руб.	100% + 30% = 130%

$$1) \frac{120}{x} = \frac{100}{130}; \quad x = \frac{120 \cdot 130}{100} = 156 \text{ (руб.)} —$$

цена одной чашки с наценкой;

2) $900:156 = 5... \Rightarrow 5$ чашек можно купить.

Ответ: 5.

Билет на поезд до Москвы стоил 2500 рублей, после подорожания — 3000 рублей. На сколько процентов повысилась цена билета?

Решение.

2500 руб.	100%
3000 руб.	x%

$$1) \frac{2500}{3000} = \frac{100}{x}; \quad x = \frac{3000 \cdot 100}{2500} = 120\%;$$

2) $120\% - 100\% = 20\%$ — повышение цены.

Ответ: 20%.



РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**.

Множество рациональных (от лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q .

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$.

Например:

$$а) 5 = \frac{5}{1};$$

$$б) 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.



Например:

а) $3 = 3,0$;

б) $\frac{3}{11} = 0,27$.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 11} \\ \underline{0} 2727 \dots \\ 30 \\ \underline{-} 22 \\ 80 \\ \underline{-} 77 \\ 30 \\ \underline{-} 22 \\ 80 \\ \underline{-} 77 \\ 3 \end{array}$$

Например:

а) $-5 + 15 = +(15 - 5) = 10$;

б) $-17 + 11 = -(17 - 11) = -6$.

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например:

а) $-2 - (-5) = -2 + 5 = 3$;

б) $8 - 9 = 8 + (-9) = -1$.

ДЕЙСТВИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

$$-(-a) = a$$

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо:

- 1) сложить их модули;
- 2) поставить перед полученным числом знак «-».

Например:

$$-2 + (-7) = -(2 + 7) = -9.$$

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо:

- 1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
- 2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Чтобы перемножить (разделить) два числа с разными знаками, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «-».

Например:

а) $10 \cdot (-3,5) = -35$;

б) $-0,25 \cdot 4 = -1$;

в) $-7 : 2 = -3,5$.

Чтобы перемножить (разделить) два отрицательных числа, надо перемножить (разделить) их модули.

Например:

а) $-7 \cdot (-10) = +70 = 70$;

б) $-42 : (-7) = +6 = 6$.



СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\text{а) } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}; \quad \text{б) } (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64};$$

$$\text{в) } (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}; \quad \text{г) } -3^{-6} = -\frac{1}{3^6} = -\frac{1}{729};$$

$$\text{д) } \frac{9^{-2} \cdot 36}{16^{-2} \cdot 27} = \frac{(3^2)^{-2} \cdot (3^2 \cdot 2^2)}{(2^4)^{-2} \cdot 3^3} = \frac{3^{-4} \cdot 3^2 \cdot 2^2}{2^{-8} \cdot 3^3} = \frac{3^{-2} \cdot 2^2}{3^3 \cdot 2^{-8}} = \frac{2^8 \cdot 2^2}{3^3 \cdot 3^2} = \frac{2^{10}}{3^5} = \frac{1024}{243}.$$



КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n > 1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем n -й степени ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) из действительного числа a называется такое действительное число b , n -я степень которого равна a .



$\sqrt[n]{a}$ не существует, если $a < 0$ и n — чётное число.



а) $\sqrt{625} = 25$, т. к. $25^2 = 625$;

б) $\sqrt[3]{64} = 4$, т. к. $4^3 = 64$;

в) $\sqrt[3]{0,000\,027} = 0,03$, т. к. $(0,03)^3 = 0,000\,027$.



Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.



а) $\sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = |3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$,

т. к. $3 > \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$,

т. к. $\sqrt{5} > \sqrt{3}$;

>>>

>>>

в) $\sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3} = 3-\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+3-4\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} =$

$= |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$, т. к. $2 > \sqrt{3}$.

Свойства корней n -й степени
 Для любых $a \geq 0, b \geq 0, n \geq 2, m \geq 2$
 ($m, n, k \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b > 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{mn}{a}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \text{ если } a > 0$$



а) $\sqrt{7 \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{66} = \sqrt{\frac{22}{3}} \cdot \sqrt{66} = \sqrt{22 \cdot 22} = 22$;

б) $\sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{(34-16)(34+16)} =$
 $= \sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.



СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a > 0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число
 ($n \geq 2, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$), тогда $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Например:

а) $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$;

б) $3^{\frac{-4}{5}} = \sqrt[5]{3^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$.

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.



$$81^{\frac{1}{7}} \cdot 27^{\frac{1}{7}} = (81 \cdot 27)^{\frac{1}{7}} = (3^4 \cdot 3^3)^{\frac{1}{7}} = (3^7)^{\frac{1}{7}} = 3^1 = 3.$$

$a > 1$, r — рациональное число

Если $r > 0$, то $a^r > 1$

Если $r < 0$, то $0 < a^r < 1$

$a > 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r > a^t$

$0 < a < 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r < a^t$

Например:

а) $3^4 > 3^5$, т. к. $3 > 1$ и $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{8}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, т. к. $0 < \frac{2}{5} < 1$ и $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$;

в) $(3,7)^{-2,5} < 1$, т. к. $3,7 > 1$, $-2,5 < 0$.



СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При любом $x \in \mathbb{R}$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.

$$\text{а) } (9^{\sqrt{26}-5})^{\sqrt{26}+5} = 9^{(\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)} = 9^{(\sqrt{26})^2 - 5^2} = 9^{26-25} = 9;$$

$$\text{б) } 7^{5\sqrt{5}-1} \cdot 7^{1-3\sqrt{5}} : 7^{2\sqrt{5}-1} = 7^{(5\sqrt{5}-1)+(1-3\sqrt{5})-(2\sqrt{5}-1)} = 7^{5\sqrt{5}-1+1-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+1} = 7^1 = 7;$$

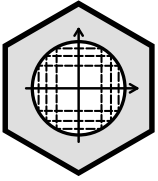
$$\text{в) } \frac{5^{\sqrt{7}} \cdot 6^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}} = \frac{(5 \cdot 6)^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}} = \frac{30^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}} = 30^{\sqrt{7}-(\sqrt{7}-2)} = 30^{\sqrt{7}-\sqrt{7}+2} = 30^2 = 900.$$

$$\text{а) } \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3^4+2^4} = \frac{3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{3^4+2^4} = \frac{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2}{3^4+2^4} = \frac{\left(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)}{3^4+2^4} = 3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}.$$

$$\text{б) } \frac{2^{-\sqrt{7}}}{0,5^{\sqrt{7}+1}} = \frac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}+1}} = \frac{2^{-\sqrt{7}}}{(2^{-1})^{\sqrt{7}+1}} = \frac{2^{-\sqrt{7}}}{2^{-\sqrt{7}-1}} = 2^{-\sqrt{7}-1(-\sqrt{7}-1)} = 2^{-\sqrt{7}+\sqrt{7}+1} = 2^1 = 2.$$

$$\text{в) } \frac{2^{2\sqrt{3}}}{0,25^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{(2^{-2})^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2(2-\sqrt{3})}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}} = 2^{2\sqrt{3}-(-4+2\sqrt{3})} = 2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = 2^4 = 16.$$

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ



Раздел посвящён тригонометрическим функциям, радианной и градусной мере угла. Рассматриваются основные тригонометрические формулы и их применение при упрощении выражений.



СИНОС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

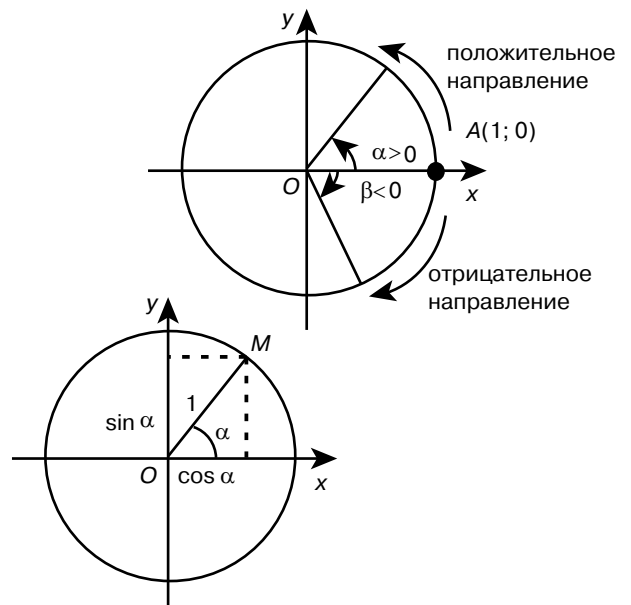
Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy .

Синусом угла α ($\sin \alpha$) называется ордината точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α .

Косинусом угла α ($\cos \alpha$) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α .

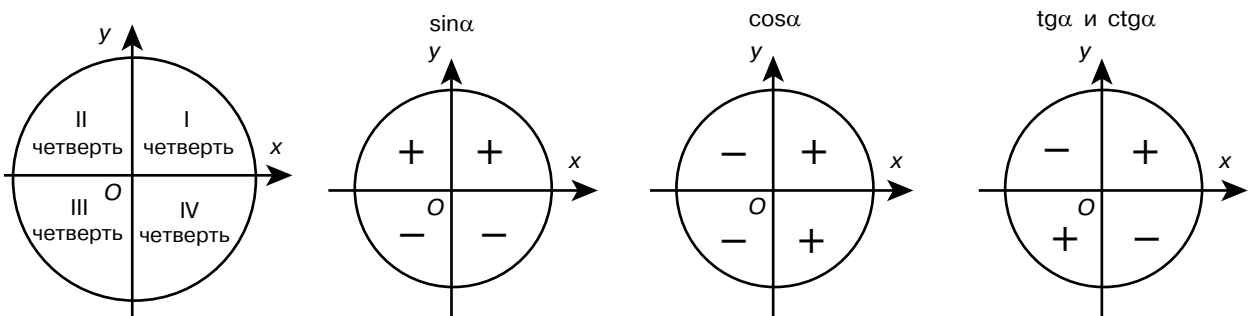
Тангенсом угла α ($\operatorname{tg} \alpha$) называется отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенсом угла α ($\operatorname{ctg} \alpha$) называется отношение косинуса угла к его синусу.



$\sin \alpha = y$	$\cos \alpha = x$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
-------------------	-------------------	--	---

ЗНАКИ СИНОСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА





Определите знаки синуса, косинуса и тангенса.

а) $\alpha = 240^\circ$;

$\alpha = 240^\circ$ — III четверть $\Rightarrow \sin \alpha < 0$,

$\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$;

б) $\beta = 500^\circ$;

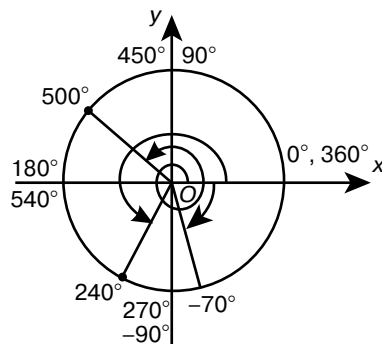
$\beta = 500^\circ$ — II четверть $\Rightarrow \sin \beta > 0$,

$\cos \beta < 0$, $\operatorname{tg} \beta < 0$;

в) $\gamma = -70^\circ$;

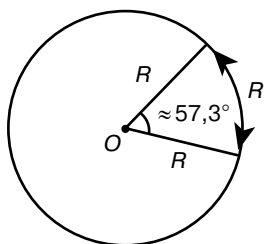
$\gamma = -70^\circ$ — IV четверть $\Rightarrow \sin \gamma < 0$,

$\cos \gamma > 0$, $\operatorname{tg} \gamma < 0$.



РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан**.



$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад}$$

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Рadiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Найдите радианную меру угла, выраженного в градусах.

а) $80^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 80 = \frac{4\pi}{9}$;

б) $290^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 290 = \frac{29\pi}{18}$.

Найдите градусную меру угла, выраженного в радианах.

а) $\frac{\pi}{5} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{5} \right)^\circ = 36^\circ$;

б) $3 = \left(\frac{180}{\pi} \cdot 3 \right)^\circ = \left(\frac{540}{\pi} \right)^\circ$.

