

ИГОРЬ
СЕРГЕЕВ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД

стандартные
подходы
к нестандартным
задачам



БОМБОРА
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва

УДК 51
ББК 22.1
С32

Сергеев, Игорь Николаевич.

С32 Математика для экзаменов и олимпиад. Стандартные подходы к нестандартным задачам / Игорь Сергеев. — Москва : Эксмо, 2026. — 208 с. — (Учимся по методикам лучших школ и вузов страны).

ISBN 978-5-04-223269-5

Можно ли решать непростые и нестандартные математические задачи с помощью простых и известных методов? Да, конечно! Главное — правильно сочетать и правильно применять такие подходы. Именно этому учит задачник, собранный доктором физико-математических наук, профессором МГУ им. М.В. Ломоносова И.Н. Сергеевым, который на протяжении многих лет принимал участие в разработке заданий для школьных предметных олимпиад по математике, а также школьных выпускных и вступительных экзаменов в МГУ им. М.В. Ломоносова.

В сборник включены задачи по ключевым разделам школьного курса: арифметике, алгебре, логике, функциям и геометрии. Даны ответы и наборы типовых схем решения, которые, подобно волшебному ключику, помогут сделать понятной любую, даже самую сложную задачу.

Книга будет полезна школьникам при подготовке к олимпиадам и экзаменам, а также преподавателям, ищущим систематизированный сборник задач с пояснениями.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-04-223269-5

© Сергеев И.Н., текст, 2026

© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2026

Оглавление

Введение	5
1 Начальные сведения и простые задачи	7
Примеры базовых задач	7
§ 1. Арифметика	8
1.1. Числа и счет	9
1.2. Доли, проценты, пропорции и выкладки	11
1.3. Статистика и вероятность	12
§ 2. Алгебра	14
2.1. Степени и радикалы	15
2.2. Логарифмы	18
2.3. Квадратный трехчлен	19
2.4. Уравнения и неравенства	19
2.5. Тригонометрические выражения и уравнения	22
2.6. Текстовые задачи	24
§ 3. Логика	26
3.1. Выведение следствий	27
3.2. Угадывание особенностей	29
3.3. Отбор корней	29
3.4. Перебор случаев	31
§ 4. Функции	33
4.1. Монотонность и замена множителя	34
4.2. Инварианты	36
4.3. Экстремумы	36
§ 5. Геометрия	38
5.1. Координатная прямая	39
5.2. Тригонометрическая окружность	40
5.3. Координатная плоскость	43
5.4. Планиметрия	44
5.5. Стереометрия	46
2 Непростые и нестандартные задачи	49
Примеры подходов к задачам	49
§ 6. Арифметический подход	53
6.1. Прямой подсчет	55

6.2.	Пропорциональность	57
6.3.	Принцип Дирихле	59
§ 7.	Алгебраический подход	60
7.1.	Введение и исключение переменных	61
7.2.	Действия с радикалами	66
7.3.	Специальные преобразования	67
7.4.	Особенности тригонометрических задач	70
7.5.	Уравнения в геометрии	73
7.6.	Действия с разными объектами	77
§ 8.	Логический подход	80
8.1.	Перебор	82
8.2.	Вывод следствий	85
8.3.	Логика в планиметрии	89
8.4.	Рассуждения с окружностями	90
8.5.	Логика в стереометрии	95
8.6.	Угадывание	97
8.7.	Разные рассуждения	101
§ 9.	Функциональный подход	108
9.1.	Замена множителя	110
9.2.	Монотонность	112
9.3.	Наибольшие и наименьшие значения	116
9.4.	Экстремальные ситуации	120
9.5.	Периодичность	122
9.6.	Выпуклость	122
9.7.	Значения функций	123
9.8.	Учет инвариантности	124
§ 10.	Графический подход	125
10.1.	Применение графиков	128
10.2.	Тригонометрическая окружность в плоскости	133
10.3.	Координаты на плоскости	134
10.4.	Графические модели	137
10.5.	Построения и преобразования в плоскости	139
10.6.	Сечения пространственных фигур	143
10.7.	Построения в пространстве	147
3	Ответы и указания	151
§ 1.	Арифметика	151
§ 2.	Алгебра	153
§ 3.	Логика	157
§ 4.	Функции	160
§ 5.	Геометрия	163
§ 6.	Арифметический подход	167
§ 7.	Алгебраический подход	169
§ 8.	Логический подход	177
§ 9.	Функциональный подход	188
§ 10.	Графический подход	194

Введение

Предлагаемый сборник задач основан на идее о том, что даже непростые и нестандартные математические задачи, предлагаемые на различных конкурсах, олимпиадах и экзаменах, обычно, как ни странно, решаются совершенно стандартными методами, хотя, возможно, и не совсем просто.

Основная трудность при решении задачи состоит, во-первых, в том, чтобы суметь по возможности оперативно определить, какой именно подход по отношению к ней наиболее эффективен, а во-вторых, в том, чтобы как раз этим-то подходом заранее владеть: не только хорошо понимать его суть вообще, но и уметь практически пользоваться им в конкретной ситуации.

Для выбора оптимального подхода к задаче нужно, прежде всего, знать собственно перечень самих этих подходов в широком смысле. Кроме того, нужно хорошо представлять множество возможных их разновидностей и вариаций, а также их тонкости и специфические особенности. Ну, и конечно же, очень полезно иметь богатый опыт непосредственного применения этих методов в самых разных (порой даже совершенно неожиданных) ситуациях.

Как ни странно, каждый из известных подходов к решению нестандартных задач в широком смысле определяется непосредственным разделом математики, на котором он основан. Эти разделы, применительно к школьному уровню, таковы:

- 1) арифметика,
- 2) алгебра,
- 3) логика,
- 4) функции,
- 5) геометрия.

Заметим, что вузовская математика содержит довольно много дополнительных разделов, таких как математический анализ и дифференциальные уравнения, высшая геометрия и топология, высшая алгебра, комбинаторика, теория вероятностей и статистика, дискретная математика и так далее.

Однако для школьных конкурсов, олимпиад и экзаменов достаточно лишь перечисленных выше пяти современных школьных разделов математики, включающих в себя, правда, и некоторые элементы высшей математики, с которыми учащиеся знакомятся уже в школьном курсе (например, с математическим анализом и теорией вероятностей). Заметим, что в школьной программе не все эти разделы выделяются в виде отдельных математических предметов.

Каждый из указанных разделов содержит богатейший набор конкретных понятий, идей, закономерностей, приемов и методов, которые применительно к конкретной задаче порой могут оказаться сугубо индивидуальными. Их подробное описание будет дано ниже.

Кроме того, зачастую к одной и той же задаче применимы сразу несколько подходов, которые в совокупности образуют целый комплекс. Выбор наиболее оптимального, наилучшего из них представляет собой не только довольно непростую задачу, но даже и не всегда возможен в принципе. Однако в любом случае один из этих подходов является в некотором смысле

главным: он представляет собой, так сказать, непосредственный первичный ключик к существенному упрощению данной задачи, относящийся к тому разделу, с которого прямо можно или нужно начинать ее решение.

Задачи, предлагаемые ниже для самостоятельного решения с целью активной подготовки к предстоящим конкурсам, олимпиадам и экзаменам по математике, заимствованы исключительно из различных математических олимпиад и вступительных испытаний (письменных или устных) в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также из школьных выпускных экзаменов, проводившихся в XXI веке.

Весь собранный задачный материал разбит на две главы. Цель первой главы состоит в разъяснении и закреплении содержания основных разделов школьной математики, что позволяет закрепить базовую информацию из этих разделов для дальнейшего ее использования при решении различных задач. Вторая глава позволяет применять методы как раз из пройденных разделов к самым разным и более сложным задачам, которые формулируются вовсе не обязательно на том же, а порой даже на совершенно другом математическом языке.

В третьей главе книги отдельным списком ко всем предложенным задачам даются ответы, а также (курсивом) довольно краткие указания, ориентирующие на подходы к их решениям.

В начале как первой, так и второй главы приводятся примеры, дающие первичное представление о задачах этой главы и различных подходах к их решению. Кроме того, в начале каждого параграфа первой главы приводятся конкретные примеры, относящиеся к рассматриваемому разделу, а в начале каждого параграфа второй главы подробно разъясняется и демонстрируется на нескольких примерах суть разбираемого в нем подхода.

Глава 1

Начальные сведения и простые задачи

Примеры базовых задач

Хотя все задачи этой главы в большинстве своем относительно просты, они составляют основу для дальнейшего поиска подходов к относительно более трудным задачам, предлагаемым уже в следующей главе.

Приведем несколько примеров, так сказать, первичных задач с краткими решениями и некоторыми пояснениями в скобках: для каждой задачи указано, с каким разделом математики она связана и какие действия предполагаются при ее решении.

Пример 1. *Игральную кость бросают 2 раза. Найдите вероятность, что выпавшие значения совпадут. Ответ округлите до сотых.*

Ответ: 0,17.

Решение 1 (арифметика: прямой подсчет вероятности). Количество различных равновероятных результатов одного броска кости равно 6, а двух бросков — $6 \cdot 6$, из которых число совпадающих результатов равно 6. Поэтому искомая вероятность равна

$$6 : (6 \cdot 6) = 1/6 = 0,1666... \approx 0,17.$$

Пример 2. *Сколько литров воды в минуту пропускает одна труба, если другая пропускает на 1 л/мин меньше и заполняет бак в 110 л на 1 мин дольше?*

Ответ: 11.

Решение 2 (алгебра: введение новой неизвестной и составление для нее уравнения). Пусть одна труба пропускает x л/мин, а другая — $(x - 1)$ л/мин и тогда

$$\frac{110}{x} + 1 = \frac{110}{x - 1} \Rightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Rightarrow (x - 11)(x + 10) = 0 \Rightarrow x = 11.$$

Пример 3. Является ли рациональным число $\operatorname{tg} 5^\circ$?

Ответ: нет.

Решение 3 (логика: доказательство путем рассуждения от противного). Заметим что если числа $a = \operatorname{tg} \alpha$ и $b = \operatorname{tg} \beta$ рациональны, то рационально и число

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a + b}{1 - ab}.$$

Поэтому если число $\operatorname{tg} 5^\circ$ рационально, то рациональны также и числа

$$\operatorname{tg}(5^\circ + 5^\circ) = \operatorname{tg} 10^\circ, \quad \operatorname{tg}(10^\circ + 10^\circ) = \operatorname{tg} 20^\circ, \quad \operatorname{tg}(10^\circ + 20^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

последнее из которых, как известно, иррационально, а значит, предположение о рациональности числа $\operatorname{tg} 5^\circ$ не верно.

Пример 4. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3-x}}(3+x) < 2.$$

Ответ: $-3 < x < 0$, $2 < x < 3$.

Решение 4 (функции: в произведении, сравниваемом с нулем, производится замена множителя другим, того же знака на **ОДЗ**, т. е. на области допустимых значений).

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{3-x}}(3+x) < 2 &\Leftrightarrow \frac{\lg(3+x)}{1/2 \cdot \lg(3-x)} < 2 \Leftrightarrow \frac{\lg(3+x) - \lg(3-x)}{\lg(3-x) - \lg 1} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3+x) - (3-x)}{(3-x) - 1} \leq 0 \\ 3+x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} & \quad (\text{т.к. } \lg u - \lg v \sim u - v \text{ при } u, v > 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-2} > 0 \\ -3 < x < 3 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-0)(x-2) > 0 \\ -3 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 0 \\ 2 < x < 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 5. Периметр вписанной в окружность трапеции равен 22, а ее средняя линия равна 5. Найдите ее боковую сторону.

Ответ: 6.

Решение 5 (геометрия: использование свойств трапеции). Сумма оснований трапеции равна ее удвоенной средней линии, т. е. $5 \cdot 2 = 10$, а тогда сумма ее боковых сторон равна $22 - 10 = 12$. Но эта трапеция вписана в окружность, поэтому она — равнобедренная, с боковой стороной $12/2 = 6$.

Ниже предлагаются задачи по различным разделам математики.

§ 1. Арифметика

Приведем примеры задач по арифметике, тесно связанной:

- с числами и счетом;
- с долями, процентами, пропорциями и выкладками;
- со статистикой и вероятностью.

Пример 6. В 9:00 из пункта А вышел пешеход, а в 10:00 вслед за ним отправился велосипедист, который догнал пешехода в 10:15. В какой момент времени нужно было выехать велосипедисту из пункта А, чтобы догнать пешехода в 10:00, если их скорости постоянны?

Ответ: 9:48.

Решение 6 (вычисления с использованием отношения скоростей). По условию, в момент 10:15 пешеход и велосипедист преодолели одинаковое расстояние: пешеход — за 75 мин, а велосипедист — за 15 мин, следовательно, его скорость в $75 : 15 = 5$ раз больше. К моменту 10:00 пешеход находится в пути 60 мин, а значит, велосипедисту, чтобы его догнать, требуется $60 : 5 = 12$ мин, поэтому ему нужно было выехать в 9:48.

Пример 7. Петя и Вася играют в кубики: Петя бросает на стол правильный 8-гранник (октаэдр) с числами $1, 2, \dots, 8$ на гранях, а Вася бросает два 4-гранника (тетраэдра) с числами $1, 2, 3, 4$ на гранях и складывает два выпавших на них (т. е. на примыкающих к столу гранях) числа. Побеждает игрок, у кого получается больше очков. Какова вероятность, что Петя выиграет?

Ответ: 0,375.

Решение 7 (прямой подсчет числа вариантов). Всего при игре возможны $8 \cdot 4 \cdot 4$ различных равновероятных исходов. При каждом из Петиних вариантов в $1, 2, \dots, 8$ очков Вася может набрать столько же очков в количестве вариантов $0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$, соответственно, а меньшее число очков — в количестве

$$0, 0, 1, 1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 3 = 13, 13 + 2 = 15.$$

Поэтому вероятность Петиного выигрыша равна

$$\frac{0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10 + 13 + 15}{8 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{8}.$$

Далее предлагаются задачи для самостоятельного решения.

1.1. Числа и счет

1.1. Вычислите

$$\left(\frac{17}{6} + 4^{300}\right) - \left(\frac{27}{10} + 8^{200}\right).$$

1.2. Вычислите:

а) $x^2 - 0,625x - \frac{1}{8}$ при $x = \frac{4}{5}$;

б) $\frac{x^2 - 5}{x - 0,2}$ при $x = \frac{9}{4}$.

1.3. Вычислите $f(2)$, где

$$f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{1}{10}.$$

1.4. Вычислите $f(2/7)$, где

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}.$$

1.5. Вычислите $f(3/5)$, где

$$f(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} - \frac{1}{24}.$$

1.6. Вычислите

$$\frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2).$$

1.7. Найдите целое число, ближайшее к числу

$$2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right).$$

1.8. Какое из чисел ближе к числу 3:

$$\frac{49}{18} \quad \text{или} \quad \frac{79}{24}?$$

1.9. Каково наименьшее общее кратное трех чисел 45, 312 и 325?

1.10. Какое наименьшее натуральное число, десятичная запись которого начинается набором цифр 20092009, делится на 36?

1.11. Найдите сумму цифр числа

$$A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1.$$

1.12. Биссектриса одного угла треугольника образует угол 28° со стороной этого угла, а другой угол этого треугольника равен 50° . Найдите третий его угол (в градусах).

1.13. Диагональ ромба образует с его стороной угол 54° . Найдите острый угол (в градусах) этого ромба.

1.14. Один из углов прямоугольного треугольника равен 61° . Найдите угол (в градусах) между проведенными из вершины прямого угла:

- а) высотой и биссектрисой;
- б) высотой и медианой;
- в) биссектрисой и медианой.

1.15. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

1.16. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105 и кратных 3, но не кратных 5.

1.17. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из 1 вратаря, 2 защитников и 3 нападающих, если в его распоряжении есть 2 вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?

1.18. Сколькими способами можно из 3 математиков и 9 экономистов составить комиссию из 8 человек, в которой участвует хотя бы 1 математик?

1.19. В ящике лежат 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зеленых, 13 желтых, 19 синих, 11 белых и 9 черных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 одноцветных шариков?

1.2. Доли, проценты, пропорции и выкладки

1.20. Найдите

$$\frac{x+y}{x-y}, \quad \text{если } x:y=19:17.$$

1.21. На покраску дома желтой краски потребовалось на 20% больше, чем белой, а коричневой — на 25% меньше, чем желтой. На сколько процентов коричневой и желтой краски вместе потребовалось больше, чем белой?

1.22. Автосалон, купив у автовладельца автомобиль за 60% его первоначальной стоимости, выставил его на продажу за цену, на 20% больше уплаченной. Какова доля последней цены от первоначальной?

1.23. У мастера дневная смена длится на 10% дольше, чем у ученика. Если бы ученик работал столько времени, сколько мастер, а мастер — столько, сколько ученик, то они изготовили бы одинаковое число деталей. На сколько процентов деталей в день мастер делает больше, чем ученик?

1.24. Продукт, содержащий первоначально 99% воды, за некоторое время высох и стал содержать 97% воды. Во сколько раз он усох (т. е. уменьшил свой вес)?

1.25. В инструкции к электросушилке записано, что в свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных — от 30% до 45%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

1.26. Любитель коктейлей Игнат смешал 200 мл сливок с 300 мл морковного сока и, тщательно перемешав полученную смесь, попробовал ее на вкус. Решив, что сливок слишком много, Игнат налил в пустой полулитровый графин 300 мл приготовленной смеси, а оставшиеся 200 мл заполнил морковным соком. Каково процентное содержание сливок в графине?

1.27. Бобер доплывает от своей норы вниз по реке до осинової роци за 3 мин. Подкрепившись, он плывет обратно к своей норе, на что у него уходит 4 мин. Во сколько раз его собственная скорость (постоянная) больше скорости течения реки?

1.28. Даша и Маша вместе пропалывают грядку за 6 мин, а одна Маша — за 10 мин. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

1.29. Первый насос наполняет бак за 20 мин, второй — за 30 мин, а третий — за 1 ч. За сколько минут они наполнят бак, работая вместе?

1.30. Один автомобиль, движущийся со скоростью 70 км/ч, обгоняет другого, движущегося в ту же сторону со скоростью 40 км/ч. Каково расстояние (в км) между ними через 15 мин после обгона?

1.31. По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют скорый и пассажирский поезда со скоростями 65 км/ч и 35 км/ч соответственно. Длина пассажирского поезда равна 700 м. Найдите длину (в м) скорого поезда, если время, за которое он полностью прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 с.

1.32. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24, а точка E — середина стороны AD . Найдите площадь:

- а) трапеции $BCDE$;
- б) треугольника CDE .

1.33. Прямая, параллельная данной стороне треугольника площади 16, отсекает от него треугольник площади 9. Найдите площадь четырехугольника, у которого 1 вершина лежит на данной стороне, а 3 остальные вершины — это вершины отсеченного треугольника.

1.34. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D , что окружность, проходящая через точки A, C и D , касается прямой BC . Найти AD , если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

1.35. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E , а на двух других сторонах — точки D и F так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF , если $BF : EF = 2 : 3$?

1.3. Статистика и вероятность

1.36. Фабрика выпускает сумки: в среднем 7 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность, что купленная сумка окажется без дефектов.

1.37. В 10-х классах школы на 25 отличников приходится 100 неотличников. Найдите вероятность, что случайно выбранный 10-классник окажется отличником?

1.38. Экзаменационный материал по биологии состоит из 25 билетов, 3 из которых содержат вопрос о грибах. На экзамене школьнику достается случайно выбранный билет. Найдите вероятность, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

1.39. Из множества натуральных чисел от 58 до 82 (включительно) наугад выбирают 1 число. Какова вероятность, что оно делится на 6?

1.40. В праздничном наборе 100 шариков 4 цветов: 10 красных, 20 синих и поровну желтых и зеленых. Какова вероятность, что вынутый из него случайный шарик окажется синего или желтого цвета?

1.41. Из коробки, содержащей 8 синих, 6 красных и 11 зеленых фломастеров, случайным образом выбирают 2 фломастера. Какова вероятность, что выберут 1 синий и 1 красный фломастер?

- 1.42.** У Вити в копилке количества 1-рублевых, 2-рублевых, 5-рублевых и 10-рублевых монет равны 12, 6, 4 и 3 соответственно. Витя наугад достает из копилки 1 монету. Найдите вероятность, что в копилке останется более 70 рублей.
- 1.43.** В случайном эксперименте симметричную монету бросают 3 раза. Найдите вероятность, что выпадет хотя бы 2 решки.
- 1.44.** Для подтверждения скидки магазин отправляет покупателю 3-значный код, ровно 2 цифры которого совпадают. С какой вероятностью такой код можно случайно угадать? Ответ округлите до тысячных.
- 1.45.** В соревновании по биатлону участвуют 60 спортсменов из 25 стран, 6 из которых — из России. Спортсмены стартуют друг за другом в порядке, определяемом жребием. Какова вероятность, что 10-м стартует спортсмен из России?
- 1.46.** На олимпиаде по русскому языку 400 участников планируют разместить в 3 аудиториях: по 120 человек — в 2 аудиториях, а всех остальных — в 3-й запасной аудитории. Найдите вероятность, что случайно выбранный участник будет писать олимпиаду в запасной аудитории.
- 1.47.** Научная конференция длится 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: в первые 3 дня — по 17 докладов, а в 4-й и 5-й дни — докладов поровну. Порядок докладчиков определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. состоится в последний день конференции?
- 1.48.** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем $36,8^{\circ}\text{C}$, равна 0,91. Найдите вероятность, что температура окажется $36,8^{\circ}\text{C}$ или выше.
- 1.49.** Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более 1 года, равна 0,8, а что более 2 лет — 0,6. Какова вероятность, что этот мотор прослужит более 1 года, но не более 2 лет?
- 1.50.** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94, а что не больше 14 — равна 0,56. Найдите вероятность, что число пассажиров будет от 15 до 19 (включительно).
- 1.51.** Перед началом каждого волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, у какой из команд будет мяч в начале игры. Команда А по очереди играет с командами Б, В и Г. Найдите вероятность, что мяч у команды А будет в начале только 2-й игры.
- 1.52.** Стрелок стреляет по каждой из 4 одинаковых мишеней по 1 разу, причем вероятность его промаха равна 0,2. Найдите вероятность, что он попадет только в первую мишень.
- 1.53.** Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5, а если черными — то с вероятностью 0,32. Они играют 2 партии, причем во 2-й партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность, что шахматист А. выиграет обе партии.

1.54. Иван Иванович оценил надежность двух интернет-магазинов: вероятность того, что из магазина А или Б нужный товар будет доставлен, оказалась равной 0,8 или 0,9 соответственно. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность, что ни один из них этот товар не доставит.

1.55. Помещение освещается фонарем с 3 лампами. Для каждой из этих ламп вероятность ее перегорания в течение года равна 0,9, причем они перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

1.56. Вероятность того, что купленная в магазине батарейка окажется бракованной, равна 0,2. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, содержащую 2 таких батарейки. Найдите вероятность, что обе батарейки окажутся исправными.

1.57. Стрелок при каждом выстреле поражает мишень с вероятностью 0,3 независимо от результатов предыдущих выстрелов. Какова вероятность, что он поразит данную мишень, сделав не более 3 выстрелов?

1.58. Садовник принес 2 корзинки фруктов: в одной — 2 яблока и 6 персиков, а в другой — 8 яблок и 12 персиков. Хозяйка, не глядя, берет из каждой корзинки по 1 фрукту. Какова вероятность, что она достанет 2 яблока или 2 персика?

§ 2. Алгебра

Приведем примеры задач по *алгебре*, тесно связанной:

- со степенями и радикалами;
- с логарифмами;
- с квадратным трехчленом;
- с уравнениями и неравенствами;
- с тригонометрическими выражениями и уравнениями;
- с текстовыми задачами.

Пример 8. Сколько различных натуральных делителей имеет число a , удовлетворяющее условию $\log_2 \log_3 \frac{a}{4} = 5$?

Ответ: 99.

Решение 8 (решение уравнения с логарифмами, подсчет числа вариантов). Число a находится однозначно

$$\log_2 \log_3 \frac{a}{4} = 5 \Leftrightarrow \log_3 \frac{a}{4} = 2^5 \Leftrightarrow \frac{a}{4} = 3^{(2^5)} \Leftrightarrow a = 2^2 \cdot 3^{32}.$$

Его натуральные делители имеют вид $2^u \cdot 3^v$, где $u = 0, 1, 2$ и $v = 0, 1, \dots, 32$, поэтому их количество равно $3 \cdot 33 = 99$.

Пример 9. Найдите площадь прямоугольника со сторонами $a+1, b+1$, где a, b — различные корни уравнения

$$x^2 = 5x + 2.$$

Ответ: 4.

Решение 9 (преобразование искомого выражения, теорема Виета). Искомая площадь равна произведению $(a+1)(b+1)$, которое с помощью теоремы Виета преобразуется к виду

$$ab + (a+b) + 1 = -2 + 5 + 1 = 4.$$

Далее предлагаются задачи для самостоятельного решения.

2.1. Степени и радикалы

2.1. Найдите $f(4)$, где

$$f(x) = \frac{\sqrt{(5-x)(5+x)}}{5} + \frac{5}{x}.$$

2.2. Найдите $f(3)$, где

$$f(x) = \frac{\sqrt{(5-x)(5+x)}}{5} + \frac{5}{x}.$$

2.3. Вычислите $f(12)$, где

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-3}} + \frac{19}{x}.$$

2.4. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[15]{5} \cdot 5 \cdot \sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}};$

б) $3^{-0,7} \cdot 3^{1,3} \cdot 9^{0,7};$

в) $(\sqrt{63} - \sqrt{28}) \cdot \sqrt{7};$

г) $(\sqrt{a} : a^{1/3})^4$, где $a = 8$.

2.5. Вычислите

$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2} - \frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}$$

при $x = 1, \underbrace{22 \dots 22}_{2005}$ и $y = -2, \underbrace{77 \dots 78}_{2004}$.

2.6. Вычислите

$$\frac{y^2 + xy - \sqrt[4]{x^5 y^3} - \sqrt[4]{xy^7}}{\sqrt[4]{y^5} - \sqrt[4]{x^2 y^3}} \cdot \left(\sqrt[4]{x^5 y^3} - \sqrt[4]{xy^7} \right)$$

при $x = 2, \underbrace{11 \dots 12}_{2013}$ и $y = 5, \underbrace{88 \dots 88}_{2014}$.

2.7. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением: