

ЛЕКЦИЯ 4

Классическая теория поля

Идут игры бейсбольного чемпионата, и кабачок «У Германа» набит болельщиками. Все следят за игрой. Подзапоздавший Арт плюхается на табурет рядом с Ленини.

Арт: Что это за тип там в конце поля?

Ленни: «Что» — это в квантовом поле, а в обычном — «кто».

Арт: Перестань, Ленини, я же только спросил. Так кто там в квантовом поле?

Ленни: «Кто» — это в обычном поле.

Арт: Так я об этом и спрашиваю. Ладно, попробуем иначе. Как насчет электрического поля?

Ленни: Ты хочешь знать, как зовут того типа в электрическом поле?

Арт: Конечно.

Ленни: Конечно? Нет, конечно — в магнитном поле.

До сих пор мы рассматривали только релятивистское движение частиц. В этой лекции мы перейдем к теории поля — не квантовой, но классической релятивистской теории поля. У нее будут некоторые отдельные точки соприкосновения с квантовой механикой, и я обязательно их упомяну. Но в основном мы все же будем придерживаться классической теории поля.

Теория поля, с которой вы, вероятно, лучше всего знакомы, — это теория электрического и магнитного полей. Эти поля векторные. Они характеризуются и направлением в пространстве, и численным значением. Мы начнем с немного более простой вещи: со скалярного поля. Как вы знаете, скаляры — это величины, обладающие численным значением, но не направлением. Поле, которое мы сейчас рассмотрим, похоже на одно скалярное поле, играющее важную роль в физике частиц. Когда мы начнем о нем говорить, вы, возможно, догадаетесь, что я имею в виду.

4.1. Поля и пространство-время

Начнем с пространства-времени. Пространство-время всегда имеет *одну* временную и несколько пространственных координат. В принципе мы могли бы построить физику с любым количеством временных и пространственных координат. Но в физическом мире, даже в теориях, в которых у пространства-времени может быть десять, одиннадцать, двадцать шесть измерений, временное измерение всегда только одно. Никто не знает, какой логический смысл можно было бы извлечь из большего числа временных измерений.

Обозначим пространственные координаты X^i ; для временной координаты пока примем обозначение t . Не будем забывать, что в теории поля X^i — не степени свободы, а просто обозначения точек пространства. События в пространстве-времени будем обозначать (t, X^i) . Индекс i пробегает столько целых значений, сколько есть пространственных координат.

Неудивительно, что степенями свободы в теории поля являются поля. Поле — измеримая величина, зависящая от положения в пространстве и способная также изменяться со временем. Обычная «бытовая» физика дает нам множество примеров таких величин. Температура атмосферы меняется от места к месту и от одного момента времени к другому. Это выражают в следующей

форме: $T(t, X^i)$. Так как температура определяется лишь одной составляющей — одним числом, она представляет собой *скалярное* поле. Скорость ветра — *векторное* поле, так как у скорости есть направление, которое само по себе может изменяться в пространстве и времени.

Математически мы представляем поле как функцию пространства и времени. Эту функцию мы часто обозначаем греческой буквой ϕ :

$$\phi(t, X^i).$$

В теории поля обычно считается, что пространство-время имеет размерность $(3 + 1)$ — под этим подразумевается, что существует три пространственных и одно временное измерение. В более общих случаях мы могли бы интересоваться изучением полей в пространстве-времени с другим числом пространственных измерений. Если у пространства-времени d пространственных измерений, мы будем называть его $(d + 1)$ -мерным.

4.2. Поля и действие

Как я уже отмечал, принцип наименьшего действия является одним из наиболее фундаментальных принципов физики, который лежит в основе всех известных физических законов. Без него у нас не было бы причин верить в закон сохранения энергии или даже в существование решений наших уравнений. Мы также будем строить наше исследование полей на принципе действия. Принципы действия, которые управляют полями, являются обобщением принципов действия для частиц. Наш план заключается в том, чтобы параллельно рассмотреть принципы действия, которые управляют полями, и принципы действия, управляющие частицами, попутно сравнивая их. Чтобы упростить это сравнение, мы сначала заново сформулируем принцип действия для нерелятивистских частиц на языке полей.

4.2.1. И снова нерелятивистские частицы

Я хочу ненадолго вернуться к теории нерелятивистских частиц — не из интереса к медленно движущимся частицам, а потому, что математика в этом случае имеет некоторое сходство с математическим аппаратом теории полей. Ведь фактически в некотором формальном смысле теория нерелятивистских частиц является простой разновидностью теории поля в мире, в котором пространство-время имеет *ноль* пространственных измерений и, как всегда, одно временное измерение.

Чтобы посмотреть, как эта идея работает, рассмотрим частицу, которая движется вдоль оси x . Обычно мы описываем движение частицы ее траекторией $x(t)$. Однако, ничуть не меняя содержания теории, мы можем изменить *обозначения* и назвать положение частицы ϕ . Вместо $x(t)$ траектория будет описываться функцией $\phi(t)$.

Если бы мы хотели переосмыслить значение символа $\phi(t)$, а именно использовать его для представления скалярного поля, он превратился бы в частный случай функции $\phi(t, X^i)$ — частный случай, в котором пространственные измерения *отсутствуют*. Другими словами, теория частиц в одномерном пространстве имеет ту же математическую структуру, что и теория скалярного поля в нульмерном пространстве. Физики иногда говорят о теории единичной частицы как о $(0 + 1)$ -мерной теории поля, причем единственным измерением является время.

Рисунок 4.1 иллюстрирует движение нерелятивистской частицы. Отметим, что по горизонтальной оси мы откладываем время — просто чтобы подчеркнуть, что t является независимым параметром. По вертикальной оси мы откладываем положение частицы в момент времени t , называя его $\phi(t)$. Кривая $\phi(t)$ представляет историю движения частицы. Она дает положение частицы ϕ на каждый момент времени. Как показывает график, ϕ может быть как отрицательным, так и положительным. Мы охарактеризуем эту траекторию на основе принципа наименьшего действия.

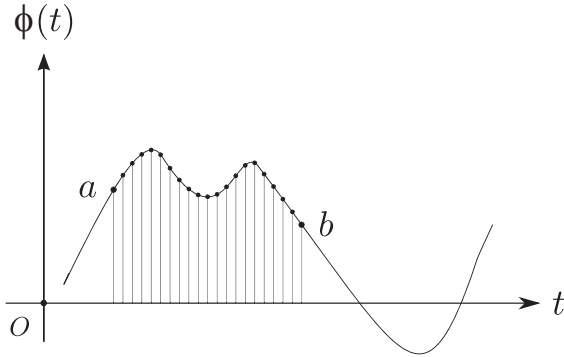


Рис. 4.1. Траектория нерелятивистской частицы

Напомним, что действие определяется как интеграл некоторого лагранжиана \mathcal{L} от начального момента времени a до конечного времени b :

$$\text{Действие} = \int_a^b \mathcal{L} dt.$$

Для нерелятивистских частиц вид этого лагранжиана прост — кинетическая энергия частицы *минус* ее потенциальная энергия. Кинетическая энергия обычно выражается как $\frac{1}{2}mv^2$, но в наших новых обозначениях мы будем записывать скорость как $\dot{\phi}$ или $\frac{d\phi}{dt}$ вместо v . В этих обозначениях кинетическая энергия — это $\frac{1}{2}m\dot{\phi}^2$, или $\frac{1}{2}m\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$. Мы немного упростим эту запись, положив массу m равной 1. Тогда кинетическая энергия будет равна:

$$\text{Кинетическая энергия} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2.$$

А какова будет потенциальная энергия? В нашем примере потенциальная энергия — это просто функция положения, другими словами, это функция ϕ , которую мы назовем $V(\phi)$. Вычитая $V(\phi)$ из кинетической энергии, получаем лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V(\phi), \quad (4.1)$$

и интеграл действия приобретает вид:

$$\text{Действие} = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V(\phi) \right] dt. \quad (4.2)$$

Как мы знаем из классической механики, уравнение Эйлера — Лагранжа помогает нам минимизировать интеграл действия и таким образом позволяет получить уравнения движения частицы.¹ Уравнение Эйлера — Лагранжа для нашего примера выглядит так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi},$$

а наша задача состоит в том, чтобы применить это уравнение к лагранжиану (4.1). Начнем с того, что запишем производную \mathcal{L} по $\left(\frac{d\phi}{dt} \right)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} = \frac{d\phi}{dt}.$$

Далее, согласно уравнению Эйлера — Лагранжа, мы должны взять от этого результата производную по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} = \frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

Таким образом, мы построили левую часть уравнения Эйлера — Лагранжа.

¹ Для нашего примера достаточно лишь одного уравнения Эйлера — Лагранжа, так как единственными переменными являются ϕ и $\dot{\phi}$.

Займемся теперь правой частью. Снова обращаясь к (4.1), мы находим, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}.$$

И наконец, приравнивая левую и правую части, получаем

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (4.3)$$

Это уравнение должно быть нам знакомо: это просто ньютоновское уравнение движения частицы. В правой его части — сила, в левой — ускорение. Если бы мы не положили массу равной единице, то получили бы просто второй закон Ньютона: $F = ma$.

Уравнения Эйлера — Лагранжа позволяют решить задачу отыскания траектории, по которой частица движется между двумя фиксированными точками a и b . Это решение эквивалентно отысканию траектории наименьшего действия, которая соединяет две фиксированные конечные точки.¹

Но, как вам известно, есть и другой способ рассмотрения этой ситуации. Нарисовав на рис. 4.1 сеть близких вертикальных линий, можно разделить ось времени на множество малых интервалов. И вместо того чтобы представлять действие как интеграл, просто думайте о нем как о сумме членов. От чего эти члены зависят? От значений функции $\phi(t)$ и ее производных в каждый момент времени. Другими словами, полная величина действия является попросту функцией многих значений $\phi(t)$. Как минимизировать функцию ϕ ? Надо продифференцировать ее по ϕ . Именно в этом и состоит суть уравнений Эйлера — Лагранжа. Можно выразиться иначе, сказав, что эти уравнения решают задачу передвижения

¹ Я часто употребляю выражения «*наименьший*» или «*минимум*», но вы хорошо знаете, что на самом деле я имею в виду «*стационарный*»: действие может достигать *либо* максимума, *либо* минимума.

точек траектории до тех пор, пока они не лягут на траекторию, минимизирующую действие.

4.3. Принципы теории поля

До сих пор мы рассматривали теорию поля в мире без пространственных измерений. Основываясь на этом примере, попробуем сделать интуитивные предположения о теории, которая описывала бы мир, более похожий на тот, в котором мы живем, — мир с одним или более чем одним пространственным измерением. При этом будем исходить из того, что теория поля, и, по сути, весь мир подчиняются принципу действия. Стационарность действия — могучий принцип, в котором сжато и зашифровано огромное количество физических законов.

4.3.1. Принцип действия

Определим принцип действия для полей. Для частицы, движущейся в одном измерении (рис. 4.1), мы сначала выбрали две фиксированные конечные точки, a и b , в качестве границ по оси времени. Затем мы рассмотрели все возможные траектории, соединяющие эти две точки, и стали искать среди них кривую, которая минимизирует действие. (Это очень похоже на отыскание кратчайшего пути между двумя точками.) Это и есть способ, которым принцип наименьшего действия говорит нам, как заполнить значениями $\phi(t)$ интервал между граничными точками a и b .

Задачей теории поля является обобщение этой идеи заполнения промежутка между граничными данными. Начнем с пространственно-временной области, которую мы можем визуализировать как четырехмерную «коробку». Чтобы построить ее, возьмем трехмерную пространственную «коробку» — скажем, область пространства внутри некоторого куба — и рассмотрим ее на некотором временном интервале. Так строится четырехмерный