

**А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир**

# **ОГЭ**

# **МАТЕМАТИКА**

---

## **КОМПЛЕКСНАЯ ПОДГОТОВКА**

**К ОСНОВНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ  
ЭКЗАМЕНУ**

---

## **ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

АСТ  
Москва  
2022

УДК 373:51  
ББК 22.1я721  
М52

**Мерзляк, Аркадий Григорьевич.**

**М52** ОГЭ : Математика : комплексная подготовка : к основному государственному экзамену : теория и практика / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва: Издательство АСТ, 2022. — 479, [1] с.: ил. — (Комплексная подготовка к ОГЭ).

**ISBN 978-5-17-150834-0**

Справочник содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на основном государственном экзамене. Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются экзаменационные задания — контрольные измерительные материалы ОГЭ.

Справочник состоит из двух глав: «Арифметика. Алгебра» и «Геометрия». Помимо теоретического материала в справочнике представлено значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач. Ко всем заданиям даны ответы для самопроверки.

В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте [fipi.ru](http://fipi.ru). Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Работа с пособием позволит повторить все основные темы курса математики за 5–9 классы и успешно подготовиться к сдаче ОГЭ.

**УДК 373:51  
ББК 22.1я721**

**ISBN 978-5-17-150834-0**

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., 2022  
© ООО «Издательство АСТ», 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	13
--------------------	----

### ГЛАВА I АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА

§ 1. <b>Натуральные числа</b> . . . . .	17
1.1. Десятичная запись натуральных чисел. . . . .	17
1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем . . . . .	18
1.3. Делимость натуральных чисел . . . . .	20
1.4. Признаки делимости. . . . .	21
1.5. Простые и составные числа . . . . .	22
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное . . . . .	24
1.7. Деление с остатком . . . . .	26
<i>Примеры заданий № 1</i> . . . . .	27
§ 2. <b>Дроби</b> . . . . .	31
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей . . . . .	31
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями. . . . .	34
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей . . . . .	35
2.4. Арифметические действия с десятичными дробями . . . . .	37
2.5. Нахождение части от целого и целого по его части. . . . .	39

---

2.6. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби . . . . .	40
2.7. Округление чисел . . . . .	42
<i>Примеры заданий № 2</i> . . . . .	43
2.8. Проценты . . . . .	47
2.9. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам . . . . .	48
2.10. Отношение. Процентное отношение . . . . .	49
2.11. Пропорции . . . . .	50
2.12. Прямая и обратная пропорциональные зависимости . . . . .	52
<i>Примеры заданий № 3</i> . . . . .	53
<b>§ 3. Рациональные числа</b> . . . . .	57
3.1. Целые числа. Рациональные числа . . . . .	57
3.2. Координатная прямая . . . . .	58
3.3. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел . . . . .	59
3.4. Арифметические действия с рациональными числами . . . . .	61
<i>Примеры заданий № 4</i> . . . . .	62
<b>§ 4. Целые выражения.</b> . . . . .	66
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения . . . . .	66
4.2. Свойства степени с натуральным показателем . . . . .	67
4.3. Одночлен . . . . .	69
4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной . . . . .	70
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов . . . . .	72

---

4.6. Квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов . . . . .	73
4.7. Формулы суммы кубов и разности кубов . . . . .	75
4.8. Разложение многочленов на множители. . .	76
<i>Примеры заданий № 5</i> . . . . .	77
<b>§ 5. Дробные выражения</b> . . . . .	82
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби . . .	82
5.2. Тождество. Тождественные преобразования выражений . . . . .	83
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей . . . . .	83
5.4. Действия с алгебраическими дробями. . . .	85
<i>Примеры заданий № 6</i> . . . . .	88
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями . . . . .	94
5.6. Стандартный вид числа . . . . .	95
<i>Примеры заданий № 7</i> . . . . .	96
<b>§ 6. Корень из числа</b> . . . . .	99
6.1. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень . . . . .	99
6.2. Свойства арифметического квадратного корня . . . . .	100
6.3. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни . . . . .	102
6.4. Корень третьей степени . . . . .	104
6.5. Запись корня с помощью степени с дробным показателем. . . . .	104
6.6. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. . . . .	105

---

6.7. Понятие о множестве. Числовые множества. Множество действительных чисел . . . . .	107
<i>Примеры заданий № 8</i> . . . . .	109
<b>§ 7. Уравнения с одной переменной</b> . . . . .	114
7.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной . . . . .	114
7.2. Линейное уравнение с одной переменной . .	117
7.3. Квадратное уравнение . . . . .	118
7.4. Теорема Виета . . . . .	121
7.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители . . . .	122
<i>Примеры заданий № 9</i> . . . . .	124
7.6. Рациональные уравнения. . . . .	128
7.7. Метод замены переменной . . . . .	129
<i>Примеры заданий № 10</i> . . . . .	131
<b>§ 8. Функции</b> . . . . .	134
8.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции . . . . .	134
8.2. Способы задания функции . . . . .	135
8.3. График функции . . . . .	137
8.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	139
8.5. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы. . . . .	142
8.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность. . . . .	144
8.7. Обратная пропорциональная зависимость. Функция $y = \frac{k}{x}$ , где $k \neq 0$ , и её свойства . . .	147
<i>Примеры заданий № 11</i> . . . . .	149

---

8.8. Квадратичная функция и её свойства . . . . .	164
8.9. Функция $y = \sqrt{x}$ и её свойства . . . . .	169
8.10. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ . . . . .	170
8.11. Функция $y =  x $ и её свойства . . . . .	170
8.12. Решение уравнений графическим методом . . . . .	171
<i>Примеры заданий № 12</i> . . . . .	173
<b>§ 9. Уравнения с двумя переменными</b> . . . . .	184
9.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения . . . . .	184
9.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом . . . . .	186
9.3. Методы решения систем двух уравнений с двумя переменными . . . . .	190
<i>Примеры заданий № 13</i> . . . . .	194
<b>§ 10. Текстовые задачи</b> . . . . .	199
10.1. Решение текстовых задач с помощью уравнений . . . . .	199
<i>Примеры заданий № 14</i> . . . . .	202
10.2. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений . . . . .	206
<i>Примеры заданий № 15</i> . . . . .	209
10.3. Решение текстовых задач арифметическим способом . . . . .	211
<i>Примеры заданий № 16</i> . . . . .	213
<b>§ 11. Неравенства</b> . . . . .	216
11.1. Числовые неравенства и их свойства . . . . .	216
11.2. Оценка значений числовых выражений с помощью свойств числовых неравенств . . . . .	218

---

11.3. Общие сведения о неравенствах с одной переменной . . . . .	220
11.4. Числовые промежутки . . . . .	222
11.5. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств . . . . .	223
11.6. Квадратные неравенства . . . . .	226
<i>Примеры заданий № 17</i> . . . . .	228
<b>§ 12. Числовые последовательности</b> . . . . .	234
12.1. Понятие последовательности . . . . .	234
12.2. Способы задания последовательности . . . . .	235
12.3. Арифметическая прогрессия . . . . .	238
12.4. Сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии . . . . .	239
12.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов . . . . .	240
12.6. Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии . . . . .	244
12.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы . . . . .	244
<i>Примеры заданий № 18</i> . . . . .	245
<b>§ 13. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики</b> . . . . .	249
13.1. Комбинаторные задачи. Перебор вариантов . . . . .	249
13.2. Комбинаторные правила суммы и произведения . . . . .	251
13.3. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков . . . . .	253
13.4. Статистика. Статистические характеристики . . . . .	255
13.5. Частота и вероятность случайного события . . . . .	257

---

13.6. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности . . . . .	259
13.7. Представление о геометрической вероятности . . . . .	261
<i>Примеры заданий № 19</i> . . . . .	263

## ГЛАВА II

# ГЕОМЕТРИЯ

<b>§ 14. Простейшие геометрические фигуры и их свойства . . . . .</b>	<b>273</b>
14.1. Прямая, луч, отрезок. Измерение отрезков . . . . .	273
14.2. Угол. Измерение углов . . . . .	275
14.3. Смежные и вертикальные углы . . . . .	277
14.4. Перпендикулярные прямые. Угол между пересекающимися прямыми. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой . . . . .	277
<i>Примеры заданий № 20</i> . . . . .	279
<b>§ 15. Параллельные прямые . . . . .</b>	<b>282</b>
15.1. Признаки параллельности прямых . . . . .	282
15.2. Свойства параллельных прямых . . . . .	283
<i>Примеры заданий № 21</i> . . . . .	285
<b>§ 16. Треугольник . . . . .</b>	<b>287</b>
16.1. Элементы треугольника. Равные треугольники . . . . .	287
16.2. Виды треугольников . . . . .	290
16.3. Признаки равенства треугольников . . . . .	291

---

16.4. Свойства равнобедренного треугольника . . .	292
16.5. Признаки равнобедренного треугольника. . .	293
16.6. Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника . . . . .	295
16.7. Неравенство треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника . . . . .	297
16.8. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника . . . . .	298
16.9. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках . . . . .	301
16.10. Средняя линия треугольника . . . . .	302
16.11. Подобные треугольники . . . . .	303
16.12. Признаки подобия треугольников . . . . .	305
<i>Примеры заданий № 22</i> . . . . .	308
16.13. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике . . . . .	314
16.14. Теорема Пифагора . . . . .	314
16.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника . . . . .	315
16.16. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от $0^\circ$ до $180^\circ$ . . . . .	318
16.17. Теорема косинусов . . . . .	321
16.18. Теорема синусов . . . . .	322
<i>Примеры заданий № 23</i> . . . . .	323
<b>§ 17. Окружность и круг</b> . . . . .	328
17.1. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры ГМТ . . . . .	328
17.2. Окружность и круг, их элементы . . . . .	329
17.3. Свойства элементов окружности . . . . .	331
17.4. Касательная и секущая к окружности . . .	332

---

17.5. Взаимное расположение двух окружностей . . . . .	334
17.6. Окружность, описанная около треугольника . . . . .	335
17.7. Окружность, вписанная в треугольник . . . . .	337
17.8. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности . . . . .	339
17.9. Длина окружности . . . . .	341
<i>Примеры заданий № 24</i> . . . . .	342
<b>§ 18. Многоугольник</b> . . . . .	349
18.1. Четырёхугольник и его элементы . . . . .	349
18.2. Параллелограмм и его свойства . . . . .	351
18.3. Признаки параллелограмма . . . . .	353
18.4. Прямоугольник, ромб, квадрат . . . . .	355
<i>Примеры заданий № 25</i> . . . . .	356
18.5. Трапеция. Средняя линия трапеции . . . . .	361
18.6. Четырёхугольник, вписанный в окружность . . . . .	364
18.7. Четырёхугольник, описанный около окружности . . . . .	365
18.8. Сумма углов выпуклого многоугольника . . . . .	365
18.9. Правильные многоугольники . . . . .	366
<i>Примеры заданий № 26</i> . . . . .	368
<b>§ 19. Площадь и объём</b> . . . . .	374
19.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника . . . . .	374
19.2. Площадь параллелограмма и трапеции . . . . .	376
19.3. Формулы для нахождения площади треугольника . . . . .	377
19.4. Площадь круга. Площадь сектора . . . . .	379
19.5. Формулы объёмов прямоугольного параллелепипеда, куба и шара . . . . .	380
<i>Примеры заданий № 27</i> . . . . .	381

---

<b>§ 20. Декартовы координаты на плоскости . . .</b>	<b>388</b>
20.1. Координатная плоскость . . . . .	388
20.2. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка. .	390
20.3. Уравнение фигуры. Уравнение окружности. . . . .	391
20.4. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом . . . . .	393
20.5. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными . . . . .	395
<i>Примеры заданий № 28 . . . . .</i>	<i>396</i>
<b>§ 21. Векторы на плоскости. . . . .</b>	<b>399</b>
21.1. Понятие вектора. Модуль вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы. . . . .	399
21.2. Координаты вектора . . . . .	402
21.3. Сложение и вычитание векторов . . . . .	404
21.4. Умножение вектора на число . . . . .	407
21.5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. . . . .	408
21.6. Скалярное произведение векторов. . . . .	410
<i>Примеры заданий № 29 . . . . .</i>	<i>412</i>
<b>§ 22. Геометрические преобразования. . . . .</b>	<b>416</b>
22.1. Движение фигуры. Параллельный перенос . . . . .	416
22.2. Осевая симметрия . . . . .	418
22.3. Центральная симметрия. . . . .	420
22.4. Поворот . . . . .	423
22.5. Гомотетия. Подобие фигур . . . . .	425
<i>Примеры заданий № 30 . . . . .</i>	<i>428</i>
<b>Ответы к примерам заданий. . . . .</b>	<b>434</b>
<b>Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов ОГЭ .</b>	<b>448</b>
<b>Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов основного государственного экзамена 2022 года . . . . .</b>	<b>449</b>

## ВВЕДЕНИЕ

На основной государственный экзамен (ОГЭ) по математике выносятся темы, рассматриваемые в курсах математики 5–6 классов, алгебры и геометрии 7–9 классов. Основой подготовки к ОГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–9 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Неудобства такого подхода очевидны: во-первых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; во-вторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобнее использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках. Она представляет собой справочник для подготовки к ОГЭ по математике.

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ОГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.

Данный справочник выполняет также и свою традиционную роль — позволяет быстро найти нужную информацию: какими свойствами обладает степень с целым показателем, чему равна сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии, как найти дробь от числа, по какой формуле можно вычислить площадь трапеции и т. п.

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов и алгебры 7–9 классов основной школы, вторая глава «Геометрия» — содержанию курса геометрии 7–9 классов. Каждая из глав разбита на параграфы. Их содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ОГЭ по математике.

Понятно, что для успешного написания ОГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в справочник включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ОГЭ по математике.

Большинство проверочных работ состоит из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте [fipi.ru](http://fipi.ru). Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Желаем вам успешной сдачи основного государственного экзамена по математике.

**ГЛАВА I**

---

**АРИФМЕТИКА.  
АЛГЕБРА**