СОВЕТСКИЕ УЧЕБНИКИ

АНДРЕЙ
КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА
6–7 КЛАССЫ

КЛАССИКА НАУЧПОПА

МОСКВА

УДК 51(075.3)
ББК 22.14я72
К44

Киселев, Андрей Петрович.

К44 Алгебра / Андрей Киселев. — Москва : Эксмо, 2026. — 176 с. — (Советские учебники. Классика научпопа).

ISBN 978-5-04-208959-6

Знаменитый учебник по алгебре выдающегося математика А. П. Киселева - любим многими поколениями. Простота объяснений, точность понятий, краткость изложения - благодаря такой подаче материал легко усваивается. Первая часть курса, представленная в книге, содержит основные понятия, рассматривает действия над относительными числами, одночленные и многочленные выражения, алгебраические дроби, уравнения первой степени и квадратные уравнения.

Учебное пособие предназначено для школьников, учащихся 6 и 7 классов, которые хотят улучшить свои знания по математике, учителей средней школы, а также всех интересующихся и любящих этот предмет.

УДК 51(075.3)
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-04-208959-6

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

I. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЗНАКОПОЛОЖЕНИЕ

1. Употребление букв. а) *Для выражения общих свойств чисел.* Пусть мы желаем кратко выразить в письменной форме, что произведение двух чисел не изменится, если мы поменяем местами множимое и множитель. Тогда, обозначив одно число буквой a, а другое буквой b, мы можем написать равенство: $a \times b = b \times a$, или, короче: $ab = ba$, условившись раз навсегда, что если между двумя буквами, написанными рядом, не стоит никакого знака, то это значит, что между ними подразумевается знак умножения. Так поступают всегда, если желают выразить, что некоторое свойство принадлежит не каким-нибудь отдельным числам, а всяким числам.

Для обозначения чисел употребляются обыкновенно буквы латинского (или французского) алфавита.

б) *Для сокращенного выражения правила, посредством которого можно решить задачи*, сходные по условиям, но различающиеся только величиной данных чисел.

Положим, например, мы решаем задачу:

найти 3% числа 520.

Тогда рассуждаем так:

1% какого-нибудь числа составляет $\frac{1}{100}$ этого числа; следовательно:

$$1\% \text{ числа } 520 \text{ составляет } \frac{520}{100} = 5{,}2;$$

$$3\% \text{ числа } 520 \text{ составляет } \frac{520}{100} \times 3 = 15{,}6.$$

Решив несколько подобного рода задач, мы замечаем, что для нахождения процентов, какого-нибудь числа достаточно разделить это число на 100 и результат умножить на число процентов. Решим задачу в таком общем виде:

найти p% числа a.

Задачу решим так:

$$1\% \text{ числа } a \text{ составляет } \frac{a}{100};$$

$$p\% \text{ числа } a \text{ составляет } \frac{a}{100} \times p.$$

Обозначив искомое число буквой x, мы можем написать равенство:

$$x \; \frac{a}{100} \times p,$$

из которого прямо видно, как можно находить проценты от любого данного числа.

Возьмем еще пример. В арифметике правило умножения дробей мы выражаем словами так: чтобы умножить дробь на дробь, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение разделить на второе. Применяя буквенные обозначения, мы можем это правило выразить очень коротко. Именно, обозначив для первой дроби числитель через a, знаменатель через b, а для второй дроби соответственно через c и d, мы можем написать:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Нетрудно видеть, что эта запись дает общее правило умножения для всяких дробей, так как под буквами мы можем подразумевать любые числа.

Точно так же для правила деления дроби на дробь будем иметь запись:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Всякое равенство или неравенство, выражающее посредством букв и знаков действий какое-нибудь соотношение между числами, называется формулой.

Приведем для примера некоторые формулы.

Если основание и высоту прямоугольника измерим одной и той же линейной единицей и для основания получим число b, а для высоты число h, то площадь s этого прямоугольника, выраженная в соответствующих квадратных единицах, определится формулой $s = bh$. При тех же обозначениях для площади треугольника получим формулу:

$$s = \frac{1}{2}\ bh.$$

Из физики известно, что для определения удельного веса какого-либо вещества надо вес данного количества этого вещества разделить на его объем. Обозначая вес тела (в граммах) через p, объем его (в куб. сантиметрах) через v и удельный вес через d, мы можем приведенное правило для определения удельного веса кратко выразить формулой:

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Алгебраическое выражение. Если несколько чисел, обозначенных буквами (или буквами и цифрами), соединены между собой посредством знаков, указывающих, какие действия и в каком порядке надо произвести над числами, то такое обозначение называется *алгебраическим выражением*.

Таковы, например, выражения:

$$\frac{a}{100} \times p; \ ab; \quad 2x + 1.$$

Для краткости мы часто будем вместо «алгебраическое выражение» говорить просто «выражение».

Вычислить значение какого-нибудь выражения для данных численных значений букв — значит, подставить в него на место букв эти численные значения и произвести все указанные в выражении действия; число, получившееся после этого, называется *численной величиной* алгебраического выражения для данных численных значений букв. Так, численная величина выражения $\frac{a}{100} \times p$ при $p = 3$ и $a = 520$ равна:

$$\frac{520}{100} \times 3 = 5{,}2 \times 3 = 15{,}6.$$

3. Действия, рассматриваемые в алгебре, следующие: *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление*, *возвышение в степень и извлечение корня*. Что такое первые четыре действия, известно из арифметики. Пятое действие — возвышение в степень — представляет собой частный случай умножения, когда перемножается несколько одинаковых сомножителей. Произведение таких сомножителей называется *степенью*, а число их — *показателем степени*. Возводимое в степень число называется *основанием степени*. Если какое-нибудь число берется сомножителем 2 раза, то произведение называется *второй степенью*; если какое-нибудь число берется сомножителем 3 раза, то произведение называется *третьей степенью* этого числа и т. д. Так, вторая степень числа 5 есть произведение 5×5, т. е. 25; третья степень числа $\frac{1}{2}$ есть произведение $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{1}{8}$. *Первой степенью* числа называют само это число.

Вторая степень называется иначе квадратом, а третья степень — *кубом*. Такие названия даны потому, что произведение $a \times a$ выражает (в квадратных единицах) площадь квадрата со стороной в а линейных единиц, а произведение $a \times a \times a$ выражает (в кубических единицах) объем куба с ребром в а линейных единиц.

Об извлечении корня мы пока говорить не будем, так как это действие в начале алгебры не рассматривается.

4. Знаки, употребляемые в алгебре. Для обозначения первых четырех действий в алгебре употребляются те же знаки, как и в арифметике, только знак умножения, как мы уже говорили, обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или один из них обозначены буквами. Например, вместо $a \times b$ (или вместо $a \cdot b$) пишут просто ab и вместо $3 \times a$ (или $3 \cdot a$) пишут 3а. В качестве знака деления употребляется, безразлично, или двоеточие «:» или горизонтальная черта; так, выражения $a : b$ и $\frac{a}{b}$ означают одно и то же, а именно, что число а делится на число b.

Возвышение в степень принято сокращенно выражать так: пишут число, которое берется сомножителем (основание степени), а над ним, с правой стороны, ставят другое число (показатель степени), выражающее, сколько раз возвышаемое число должно быть повторено сомножителем. Так, 3^4 (читается: *три в четвертой степени*) заменяет собой подробное обозначение:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Если при числе не стоит никакого показателя степени, то можно подразумевать при нем показателем единицу; например а означает то же самое, что и a^1.

Равенство двух каких-либо выражений обозначается знаком «=», а неравенство знаком «>», который острием угла должен быть обращен к меньшему числу. Например, если написано:

$$5 + 7 = 7, \qquad 5 + 2 < 10, \qquad 5 + 2 > 6,$$

то это значит: 5 + 2 равно 7; 5 + 2 меньше 10; 5 + 2 больше 6.

5. Порядок действий. Относительно порядка, в котором надо производить действия, указанные в алгебраическом выражении, условились: *сначала производить действия высшего порядка, т. е. возвышение в степень и извлечение корня, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание.*

Так, если написано выражение: $3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$, то при вычислении его надо сначала произвести возвышение в степень (число а возвысить в квадрат и число b в куб), затем умножение и деление (3 умножить на a^2 и полученный результат на b; b^3 разделить на c) и, наконец, вычитание и сложение (из $3a^2b$ вычесть $\frac{b^3}{c}$ и к результату прибавить d).

Когда приходится по условиям задачи отступать от этого порядка действий, то употребляются скобки. Скобки показывают, что действия над числами, заключенными в скобки, надо произвести ранее других. Например выражения:

$$5 + 7 \cdot 2 \text{ и } (5 + 7) \cdot 2$$

означают не одно и тоже. В первом случае нужно 7 умножить на 2 и результат прибавить к 5 (получаем 19). Во втором случае надо сначала сложить 5 и 7 и результат умножить на 2 (получаем 24).

Точно так же, если написано:

$$(a + b)\, c - d,$$

то это значит, что сначала надо сложить а и b, затем полученное число умножить на с и из того, что получится, вычесть d.

Когда приходится заключать в скобки такое выражение, в котором есть свои скобки, то новым скобкам придают какую-нибудь другую форму. Например выражение:

$$a\,\{b - [c + (d - e)]\}$$

означает, что из d вычитается е, полученная разность складывается с с, полученная сумма вычитается из b и на эту разность умножается а.

Скобкам дают обыкновенно такие названия: круглые скобки ( ), квадратные, или ломаные, скобки [ ], фигурные скобки { }.

Когда в выражение входят несколько скобок, то обычно сначала производят действия над числами, заключенными в круглые скобки, затем над числами в квадратных скобках и, наконец, в фигурных. Производя указанные в скобках действия, мы уничтожаем, или, как говорят, раскрываем скобки. Так, в выражении:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot (6 - 2) - 3 \cdot (5 - 2)]\}$$

сначала раскрываем круглые скобки:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [104 - 2 \cdot 4 - 3 - 3]\}.$$

Затем раскрываем квадратные скобки: $5 \cdot \{24 - 2 \cdot 9\}$.

Наконец, раскрываем фигурные скобки: $5 \cdot 6 = 30$.

Упражнения

1. Сторона квадрата равна a метрам; выразить его периметр, затем площадь.

2. Если ребро куба равно m сантиметрам, то как выразятся его поверхность, его объем?

3. У прямоугольника основание равно x метрам, а высота на d метрам короче основания. Выразить его площадь.

4. Некоторое двузначное число содержит x десятков, у простых единиц. Сколько всех единиц в этом числе?

5. В трехзначном числе имеется а сотен, b десятков и с простых единиц. Какой формулой можно выразить все число единиц, содержащееся в этом числе?

6. Смешано 2 сорта чаю: первого сорта взято а кг, второго b кг. Килограмм первого сорта стоит т руб., второго сорта п руб. Выразить цену одного килограмма смеси.

7. Указать посредством знаков, принятых в алгебре: 1) сумму квадратов чисел x и y; 2) квадрат суммы этих же чисел; 3) произведение квадратов этих чисел; 4) квадрат произведения их; 5) произведение суммы чисел a и b на их разность; 6) частное от деления суммы чисел т и n на их разность (последнее выразить двояким путем, т. е. посредством знака «:» и посредством черты).

8. Вычислить следующие выражения при а = 20, $b = 8$ и $c = 3$:

1) $(a + b)c$; 2) $a + bc$; 3) $(a + b)\ a - b$;

4) $(a + b)(a - b)$; 5) $(a + b) : c$; 6) $\dfrac{a + b}{b - c}$.

9. Написать выражение, которое получится, если в произведении $3ab$ вместо а подставить сумму $x + y$ и вместо b разность $x - y$.

Исторические сведения

Слово «алгебра» — арабского происхождения. Этим словом начиналось заглавие математического труда, написанного арабским ученым Альхваризми (в 820 г.).

В Европе впервые употребил это слово в качестве заглавия к своему математическому труду итальянский математик Бомбелли в 1572 г., а затем постепенно им стали пользоваться все математики.

Значение этого слова будет понятно после прохождения главы об уравнениях.

Буквы для обозначения чисел ввел впервые французский математик Виета в 1591 г. После него особенно широко пользовался буквенными обозначениями знаменитый французский философ и математик *Рене Декарт* (1596–1650 гг.).

Знаки, употребляемые в настоящее время в алгебре, введены различными математиками в разное время. Прежде для обозначения действий употребляли целое слово или даже фразу. Практическая потребность в более быстрых вычислениях приводила к попыткам сокращения отдельных наиболее употребительных слов, пока, наконец, эти слова или их сокращения не заменялись специальными знаками. Укажем время появления наиболее употребительных знаков.

Знаки сложения и вычитания «+» и «–» введены были немецким математиком *Видманом* в 1489 г. До него еще они встречаются в рукописях великого итальянского художника *Леонардо-да-Винчи.*

Для обозначения равенства введен был (в 1557 г.) английским алгебраистом *Рекордом* знак «=», «ибо, — как писал он, — никакие два предмета не могут быть более равными, чем две параллельные линии одинаковой длины». Другой английский математик *Херриот* ввел знаки «>» и «<» (в 1631 г.) и точку как знак умножения.

Знаменитым немецким математиком *Лейбницем* (1694 г.) впервые введен знак «:» *для обозначения* деления, которое раньше его обозначалось чертой.

Скобки ( ), [ ] и { } встречаются впервые в трудах фламандского математика Жирара (1629 г.).

Не все эти знаки сразу входили во всеобщее употребление. Некоторые математики продолжали еще пользоваться частично старыми обозначениями. *Алгебраическую символику в ее настоящем виде можно считать окончательно* установившейся лишь к концу XVIII столетия. Огромное влияние оказали в этом отношении сочинения великого английского ученого *Исаака Ньютона* (1642–1727 гг.).

II. СВОЙСТВА ПЕРВЫХ ЧЕТЫРЕХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Напомним известные уже из арифметики главнейшие свойства действий сложения, вычитания, умножения и деления, так как этими свойствами придется часто пользоваться и в алгебре.

6. Сложение. а) *Сумма не изменяется от перестановки слагаемых* (переместительный закон сложения). Так:

$$3 + 8 = 8 + 3;$$

$$5 + 2 + 4 = 2 + 5 + 4 = 4 + 2 + 5.$$

Вообще:

$$a + b = b + a;$$
$$a + b + c + \ldots = b + a + c + \ldots = c + a + b + \ldots$$

Ряд точек показывает, что число слагаемых может быть и более трех.

б) *Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какие-нибудь из них заменить их суммой* (сочетательный закон сложения). Так:

$$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15;$$

$$4 + 7 + 11 + 6 + 5 = 7 + (4 + 5) + (11 + 6) = 7 + 9 + 17 = 33.$$

Вообще:

$$a + b + c = a + (b + c) = b + (a + c) \text{ и т. п.}$$

Иногда этот закон выражают так: *слагаемые можно соединять в какие угодно группы.*

в) *Чтобы прибавить к какому-либо числу сумму нескольких чисел, можно прибавить отдельно каждое слагаемое одно за другим.* Так:

$$5 + (7 + 3) = (5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15.$$

Вообще:

$$a + (b + c + d + \ldots) = a + b + c + d + \ldots.$$

7. Вычитание. а) *Чтобы вычесть из какого-нибудь числа сумму нескольких чисел, можно вычесть отдельно каждое слагаемое одно за другим.* Так:

$$20 - (5 + 8) = (20 - 5) - 8 = 15 - 8 = 7.$$

Вообще:

$$a - (b + c + d + \ldots) = a - b - c - d - \ldots.$$

б) *Чтобы прибавить разность двух чисел, можно прибавить уменьшаемое и затем вычесть вычитаемое.*

Так:

$$8 + (11 - 5) = 8 + 11 - 5 = 14.$$

Вообще:

$$a + (b - c) = \mathrm{a} + b - c.$$

в) Чтобы вычесть разность, можно сначала прибавить вычитаемое и затем вычесть уменьшаемое. Так:

$$18 - (9 - 5) = 18 + 4 - 5 - 9 = 14.$$

Вообще:

$$a - (b - c) = \mathrm{a} + c - b.$$

8. Умножение. а) Произведение не изменится от перестановки сомножителей (переместительный закон умножения). Так:

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4;\ 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Вообще:

$$ab = ba;\ abc\ldots = bac\ldots = cba\ldots.$$

б) Произведение нескольких сомножителей не изменится, если какие-нибудь из них заменить их произведением (сочетательный закон умножения). Так:

$$7 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot (3 \cdot 7) = 5 \cdot 21 = 105.$$

Вообще:

$$abc = a\,(bc) = b\,(ac) \text{ и т. п.}$$

в) Чтобы умножить какое-либо число на произведение нескольких сомножителей, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д. Так:

$$3 \cdot (5 \cdot 4) = (3 \cdot 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60.$$

Вообще:

$$a\,(bcd\ldots) = \{[(ab)\ c]\ d\}\ \ldots.$$

г) Чтобы умножить произведение нескольких сомножителей на какое-либо число, можно умножить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения. Так:

$$(3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 3).$$

Вообще:

$$(abc\ldots)\ m = (am)\ bc\ldots = a\,(bm)\ c\ldots \text{ и т. п.}$$

д) Чтобы умножить сумму на какое-либо число, можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить. Так:

$$(5 + 3) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7.$$

Вообще:

$$(a + b + c + \ldots)\ \text{т} = am + bm + cm + \ldots.$$

В силу переместительного закона умножения это же свойство можно выразить так: чтобы умножить какое-либо число на сумму нескольких чисел, можно умножить это число на каждое слагаемое отдельно и полученные результаты сложить. Так:

$$5 \cdot (4 + 6) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6.$$

Вообще:

$$m\,(a + b + c + \ldots) = ma + mb + mc + \ldots.$$

Эго свойство называется распределительным законом умножения, так как умножение, производимое над суммой, распределяется на каждое слагаемое в отдельности.

е) Распределительный закон можно применять и к разности. Так:

$$(8 - 5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4;$$

$$7 \cdot (9 - 6) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 6.$$

Вообще:

$$(a - b)\,c = ac - bc; \qquad a\,(b - c) = ab - ac,$$

т. е. чтобы умножить разность на какое-либо число, можно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй; чтобы умножить какое-либо число на разность, можно это число умножить отдельно на уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй.

9. Деление. а) Чтобы разделить сумму на какое-либо число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно и полученные результаты сложить:

$$\frac{30 + 12 + 5}{3} = \frac{30}{3} + \frac{12}{3} + \frac{5}{3} = 10 + 4 + 1\,\frac{2}{3}\,.$$

Вообще:

$$\frac{a+b+c+\ldots}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\ldots$$

б) Чтобы разделить разность на какое-либо число» можно разделить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй:

$$\frac{20-8}{5}=\frac{20}{5}-\frac{8}{5}=4-1\frac{3}{5}\ .$$

Вообще:

$$\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}\ .$$

в) Чтобы разделить произведение нескольких сомножителей на какое-либо число, можно разделить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения:

$$(40\cdot 12\cdot 8):4=10\cdot 12\cdot 8=40\cdot 3\cdot 8=40\cdot 12-2.$$

Вообще:

$$(abc\ldots):m=(a:m)\,bc\ldots=a\,(b:m)\,c\ldots \text{ и т. д.}$$

г) Чтобы разделить какое-либо число на произведение нескольких сомножителей, можно разделить это число на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и т. д.:

$$120:(2\cdot 5\cdot 3)=[(120:2):5]:3=(60:5):3=12:3=4.$$

Вообще:

$$a:(bcd\ldots)=[(a:b):c]:d \text{ и т. д.}$$

д) Укажем еще следующее свойство деления:

Если делимое и делитель умножим (или разделим) на одно и то же число, то частное не изменится.

Поясним это свойство на следующих двух примерах;

1) $8:3=\dfrac{8}{3}$,

умножим делимое и делитель, положим, на 5; тогда получим новое частное:

$$(8\cdot 5):(3\cdot 5)=\frac{8\cdot 5}{3\cdot 5},$$

которое по сокращении дроби на 5 даст прежнее частное 8/3.