

**АНДРЕЙ
ПАВЛИКОВ**

**МАТЕМАТИКА
ОТ ОГЭ
ДО ВУЗА**

**ТЕОРИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ
С НУЛЯ ДО ЗАКОНА
БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ**



БОМБОРА
ИЗДАТЕЛЬСТВО

УДК 519.2
ББК 22.171
П12

Павликов, Андрей Николаевич.

П12 Математика от ОГЭ до ВУЗа. Теория вероятностей с нуля до закона больших чисел / Андрей Павликов. — Москва : Эксмо, 2026. — 352 с. — (Математика без скуки с Андреем Павликовым).

ISBN 978-5-04-223099-8

Что такое теория вероятностей? Как работают круги Эйлера? Книга «Теория вероятностей с нуля до закона больших чисел» предназначена для учащихся 7–11 классов, желающих освоить основы теории вероятностей и подготовиться к экзаменам и олимпиадам по математике. Книга также будет полезна учителям и репетиторам, работающим со школьниками. В ней подробно рассматриваются ключевые понятия, правила и методы, начиная с простейших определений и заканчивая достаточно сложными задачами. Всего в книге разобрано более 270 примеров. В конце книги собраны 150 задач для самостоятельного решения.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 978-5-04-223099-8

© Павликов А.Н., текст, 2026
© skinorist, иллюстрации, 2026
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2026

Оглавление

Благодарности	6
Введение	7
1 Основные понятия	15
Что такое вероятность?	15
Краткая история теории вероятностей	16
Случайный эксперимент	17
Случайные события	18
2 Визуализация событий	25
Азы теории множеств	25
Круги Эйлера	27
Алгебра событий	32
3 Классическая вероятность	35
Подбрасывание монеты	37
Подбрасывание кубика	41
Жеребьевки	50
Равновозможные события	53
Неравновозможные события	55
4 Геометрическая вероятность	59
Вероятность на прямой	60
Вероятность на плоскости	61
Вероятность в пространстве	64
Более сложные задачи	66

5	Правила вычисления вероятностей	71
	Теорема для противоположных событий	72
	Теорема для несовместных событий	72
	Теорема для совместных событий	73
	Условная вероятность	77
	Теорема для независимых событий	79
	Вычитание вероятностей	81
	Умножение вероятностей	82
	Сложение вероятностей	84
	Применение нескольких теорем	88
	Дерево эксперимента	103
	Использование координатной прямой	117
6	Условная вероятность	121
	Формула условной вероятности	122
	Формула полной вероятности	128
	Формула Байеса	137
7	Комбинаторика	145
	Основные принципы комбинаторики	145
	Перестановки, размещения и сочетания	146
	Применение комбинаторики	149
8	Повторные испытания	161
	Схема с возвращением	162
	Схема без возвращения	164
	Повторные испытания до нескольких успехов	167
	Формула Бернулли	169
	Теоремы Муавра – Лапласа	180
	Производящая функция	188
9	Случайные блуждания	193
	Задача про прогноз погоды	194
	Задача о блуждающем пьянице	196
	Задача о разорении игрока	201
	Немного о цепях Маркова	204

10 Случайные величины	207
Дискретные случайные величины	208
Биномиальное распределение	212
Распределение Пуассона	216
Геометрическое распределение	224
Непрерывные случайные величины	229
Равномерное распределение	230
Нормальное распределение	234
Показательное распределение	237
О независимости случайных величин	240
11 Математическое ожидание, медиана, дисперсия	243
Математическое ожидание	243
Медиана	256
Дисперсия и стандартное отклонение	259
12 Числовые характеристики	267
Биномиальное распределение	267
Распределение Пуассона	271
Геометрическое распределение	274
Гипергеометрическое распределение	277
Равномерное распределение	281
Нормальное распределение	284
Показательное распределение	289
13 Закон больших чисел	291
Неравенство Маркова	291
Неравенство Чебышёва	294
Закон больших чисел	297
14 Интересные задачи	303
15 Заключение	323
Подводим итоги	323
Намечаем дальнейший путь	326
16 Задачник	329
Приложение	347

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность всем сотрудникам издательства «Эксмо» за высокий профессионализм, внимание к деталям и неизменную поддержку на всех этапах работы над книгой. Отдельная благодарность редакторам за терпение и ценные замечания.

Особая благодарность научному редактору Николаю Казимирову за внимательное прочтение рукописи и конструктивную критику. Книга заметно выиграла благодаря его советам и предложениям, которые сделали материал более доступным для читателя.

Введение

Профессора математики спрашивают:

— *Вы пойдете голосовать?*

— *Нет.*

— *Почему, профессор?*

— *Согласно теории вероятностей мой голос ни на что не повлияет.*

— *Но, профессор, что, если все окажутся такими же умными?*

— *Согласно теории вероятностей все умными не окажутся...*

Зачем нужна теория вероятностей? Почему иногда кажется, что автобус всегда опаздывает, или что «сегодня точно не мой день»? Случайность окружает нас повсюду, а математика может объяснить даже то, что кажется чистой удачей.

«Вероятность дождя небольшая», «шансы команд пятьдесят на пятьдесят», «у боксера А нулевые шансы против боксера Б» – такие высказывания мы часто слышим или читаем в средствах массовой информации, а также от знакомых или незнакомых людей.

Какой смысл заложен в этих высказываниях? Речь идет о достоверности наступления или не наступления определенного события. Все подобные высказывания базируются на жизненном опыте и интуитивном представлении возможности появления какого-то события. Более того, незнание смысла термина «вероятность случайного события» не мешает делать подобные утверждения.

Прогноз «вероятность дождя небольшая» означает, что,

скорее всего, дождя сегодня не будет, но в то же время это утверждение не отрицает того, что дождь может пойти. Скажем, в десяти случаях подобного прогноза дождь пойдет один-два раза, поэтому брать или не брать с собой зонт, каждый решает самостоятельно.

Фраза «шансы команд пятьдесят на пятьдесят» означает, что результат матча практически непредсказуем, так как силы команд равны.

Зато утверждение «у боксера А нулевые шансы против боксера Б» может означать, что боксер Б намного сильнее боксера А.

Во всех примерах речь шла о событиях, еще не наступивших, и результат каждого из них не зависел от высказывающего утверждение. Иными словами, каждая из сказанных фраз говорила о степени уверенности говорящего в наступлении события, а говоря научным языком, – о вероятности наступления события.

Что же такое вероятность? Вероятность – это мера возможности наступления случайного события, которая выражает, насколько вероятно, что данное событие произойдет.

Давайте обсудим это понятие более подробно. Конечно, подбрасывая монету или кубик один раз, мы не можем предсказать, выпадет монета орлом или решкой и какая цифра появится на верхней грани кубика. Тем не менее интуитивно понятно, что шансы выпадения орла и решки одинаковые и должны быть равны по 50%. Аналогично все шесть цифр, написанные на гранях игрального кубика, должны появляться на верхней грани с одинаковыми шансами.

Кстати, незнание определения вероятности случайного события часто не мешает правильно сравнивать вероятности наступления различных событий. К примеру, рассмотрим кубик, три грани которого покрашены в белый цвет, две грани покрашены в синий цвет, а одна – в красный. Представляется более или менее очевидным, что если мы будем бросать кубик многократно, то грани белого цвета будут появляться чаще, чем грани, окрашенные в синий цвет, а грани синего цвета будут появляться чаще, чем гра-

ни, окрашенные в красный цвет.

В то же время вряд ли кто согласится держать пари, что при 50 бросках монеты все 50 раз выпадет орел. Уже больно неправдоподобным кажется такое событие! Хотя и не невозможным.

Становится понятным, что хотелось бы подвести под все подобные высказывания обоснование, а значит, должен появиться математический аппарат, который позволит приписывать или вычислять меру нашей уверенности или неуверенности в наступлении различных событий.

Но сразу заметим, что говорить об измерении вероятности какого-то единичного случайного события едва ли имеет смысл. Почему? Вернемся к бросанию монеты. Понятно, что если монета подброшена всего один раз, то один раз появится орел (и тогда решка не появится ни разу) или один раз появится решка (и тогда орел не появится ни разу). Получается, что наше интуитивное представление о том, что «шансы выпадения орла и решки пятьдесят на пятьдесят», не подтвердились.

Из сказанного выше можно сделать следующий важный вывод: говорить о мере вероятности случайного события имеет смысл лишь для таких событий, которые многократно повторяются, причем желательно в одних и тех же условиях. Если мы станем повторно подбрасывать монету и будем собирать статистику выпавших орлов и решек, тогда начнет появляться стройная теория.

Далее мы увидим, что, давая разумное определение вероятности случайного события, мы придем к так называемому закону больших чисел. Смысл этого закона в том, что при многократном (n раз) повторении одного и того же опыта, в результате которого с вероятностью p должен наступать определенный исход A , частота события, то есть отношение числа m фактического появления исхода A к числу n испытаний, близка к априорной вероятности p . Говоря точнее, вероятность значительного отклонения частоты события от его вероятности мала и становится тем меньше, чем большее количество повторений опыта мы проводим. Это понятие носит название статистической устойчивости события.

Еще раз рассмотрим пример с подбрасыванием монеты, но сначала обсудим два понятия, которые кажутся совершенно очевидными. Есть два события, результаты которых мы можем всегда предсказать. К примеру, сегодня вторник. Какой день недели будем следующим? Очевидно – среда. И так же очевидно, что завтра не будет ни понедельника, ни вторника, ни четверга, ни пятницы, ни субботы, ни воскресенья.

Таким образом, событие «после вторника наступит среда» происходит всегда, то есть в 100% случаев, или, как говорят, подобное событие достоверное. Такому событию естественно приписать вероятность 1.

А событие «после вторника наступит пятница» не происходит никогда, то есть наступает в 0% случаев, или, как говорят, подобное событие невозможно. Такому событию естественно приписать вероятность 0.

А теперь возвращаемся к монете. Выпадение орла или решки – событие случайное. Кажется естественным приписать им вероятности равные 0,5, но это обязательно надо обосновать. Давайте проведем наш опыт с подбрасыванием монеты много (желательно – очень много) раз. Я призываю читателей сделать это самостоятельно, хотя бы раз 100. Впрочем, если эта процедура не вызывает у вас восторга, обратимся к истории.

Французский естествоиспытатель XVIII века Жорж-Луи Леклерк де Бюффон подбросил монету 4040 раз. При этом орел выпал 2048 раз. Таким образом, в опыте Бюффона частота появления орла равна $2048/4040 \approx 0,5069$.

Английский статистик Карл Пирсон описал в своих работах две серии подбрасываний монеты. В первом опыте было сделано 12000 бросков, и орел появился 6019 раз, что дает частоту $6019/12000 \approx 0,5016$. Более масштабной была вторая серия, которая состояла из 24000 подбрасываний монеты. В этой серии орел выпал 12012 раз, а частота его появления равна $12012/24000 \approx 0,5005$.

Таким образом, можно сделать вывод, что интуитивное предположение о вероятности выпадения орла, равной 0,5, подтверждается практикой. Причем чем больше раз был повторен опыт, тем ближе частота появления орла была к

«теоретическому» значению.

Итак, мы получили некоторое минимальное представление о том, что такое вероятность. И сразу хочу предупредить, что нас с вами ждет увлекательное путешествие в мир теории вероятностей, причем изучение этой теории доступно для школьников, начиная класса с шестого-седьмого. Достаточно уметь работать с дробями и владеть арифметикой.

Более того, подобное изучение является важным этапом в образовательном процессе. Оно помогает:

- развивать навыки логического анализа и критического мышления, учиться делать выводы на основе данных и оценивать риски;
- применять понятие вероятности в различных сферах реальной жизни, включая финансы, спорт, медицину и науку;
- принимать более обоснованные решения на основе вероятностных концепций и лучше осваивать статистические методы анализа данных.

И, не в последнюю очередь, теория вероятностей – это интересные задачи (и не только про монетки, карты или игральные кубики), а также обязательная часть выпускного школьного экзамена, будь то ОГЭ или ЕГЭ по математике.

Дадим краткий обзор содержания книги по главам.

Глава 1. Мы начнем с самого простого: что такое вероятность? Что такое случайное событие? Что значит «вероятность равна 0,5»? Какие бывают события? Почему два события могут происходить одновременно или мешать друг другу? Это глава – словарь, нужный для того, чтобы начать говорить на новом языке.

Глава 2. Знаете, что такое множество и как рисуют круги Эйлера? С их помощью мы будем визуализировать сложные комбинации событий: когда одно происходит вместе с другим, когда одно исключает другое. Вы научитесь разбираться в сложных формулировках типа: «какова ве-

роятность, что случилось A , но не случилось B » и как считать вероятности, используя эти картинки.

Глава 3. Классическая вероятность наверняка знакома многим из вас: бросаем игральную кость, тянем билет на экзамене, выбираем шар из коробки. Мы разберем множество примеров, где всё честно и все шансы равны. Причем все задачи сможем решить в буквальном смысле слова «на пальцах», то есть сможем все пересчитать. Это основа, с которой начинается вся теория вероятностей.

Глава 4. А если исходов бесконечно много? Например, вы приходите на остановку в случайное время – какова вероятность, что придется ждать автобус больше 5 минут? Или: капля дождя падает на асфальт – куда она попадет? В таких задачах уже не посчитаешь «один, два, три», но можно использовать длину, площадь или время. Это и есть геометрическая вероятность, когда вероятность превращается в долю целого. Красивая и полезная тема!

Глава 5. Самая объемная глава, в которой мы соберем все правила в одну систему: как складывать и умножать вероятности. Научимся строить деревья случайного эксперимента и работать с координатной прямой. Эти инструменты помогут вам не запутаться даже в самых длинных задачах с несколькими этапами. Освоим простой словарь из трех (!) слов, который позволит разобрать любое сложное событие на простейшие.

Глава 6. Что изменится, если мы получим дополнительную информацию? Например, вы знаете, что в семье двое детей и один из них – мальчик. Какова вероятность, что второй тоже мальчик? В этой главе мы познакомимся с понятием условной вероятности, а также с формулой полной вероятности и формулой Байеса, которые используют даже врачи и программисты.

Глава 7. В тех задачах, где общее количество исходов можно пересчитать, но их очень много, на помощь приходит комбинаторика. Сколько есть способов рассадить друзей за столом с соблюдением определенных договоренностей? Сколько различных паролей можно составить из 4 цифр? Чтобы находить вероятности, нужно уметь считать количество комбинаций. Мы освоим два правила: сложе-

ния и умножения, и три ключевых метода: перестановки, сочетания и размещения. Это как конструктор: собираем все варианты и отбираем те из них, которые нас устраивают.

Глава 8. А что, если одно и то же действие повторяется много раз: например, вы стреляете по мишени 10 раз подряд? Какова вероятность попасть ровно 7 раз? А если вынимаем шары из урны и оставляем их себе? А если не оставляем, а кладем обратно в урну? Как изменится вероятность? В этой главе мы рассмотрим схемы повторных испытаний с возвращениями и без, а также выведем формулу Бернулли и научимся ее применять.

Глава 9. Представьте, что человек идет по прямой, каждый шаг делает случайно: направо или налево. Какова вероятность, что он окажется в определенной точке через 10 шагов? Или что он когда-нибудь вернется домой? Казалось бы, зачем нам это знать? Задача про случайные блуждания оказывается очень актуальной в реальной жизни. Мы рассмотрим ее в трех различных интерпретациях.

Глава 10. Не всегда нас интересует просто факт «произошло событие или нет». Иногда хочется знать: сколько раз оно произойдет, сколько времени продлится. Вот тут на помощь приходит случайная величина. Некоторые ситуации встречаются так часто, что для них придумали готовые «шаблоны» – законы распределения. Биномиальное – для количества успехов, Пуассона – для редких событий, геометрическое – для ожидания первого успеха, нормальное – для всего, что складывается из множества мелких факторов. Эти модели как готовые рецепты: подставил свои данные – получил ответ.

Глава 11. Если бы вы могли выбрать только один результат – какой бы выбрали? Скорее всего, средний – это и есть математическое ожидание. А дисперсия покажет, насколько сильно реальные значения будут отклоняться от этого среднего. Эти две числовые характеристики случайной величины помогают ориентироваться в мире случайности.

Глава 12. Эта глава носит технический характер, и при первом прочтении ее можно пропустить. В ней мы посчита-

ем математическое ожидание и дисперсию для тех важных и часто встречающихся на практике законов распределения, которые подробно обсудили в предыдущей главе.

Глава 13. В этой главе мы вкратце расскажем о серьезных результатах теории вероятностей. Неравенство Маркова и неравенство Чебышёва, которые позволяют оценивать вероятность события через матожидание и дисперсию. Почему, если бросить монету тысячу раз, орел выпадет примерно в половине случаев? Почему казино всегда в выигрыше? Ответ кроется в законе больших чисел. Он гласит: чем больше опытов, тем ближе результат к ожидаемому.

Глава 14. В этой главе мы разберем несколько красивых, парадоксальных и хитрых задач, которые позволят проверить все, чему мы научились. Некоторые из них покажутся совсем простыми, но интуитивно напрашивающийся ответ чаще всего оказывается неверным. Другие задачи могут показаться очень сложными, но решаются легко. Решайте, обсуждайте, удивляйтесь!

Глава 15. В этой короткой главе мы еще раз пройдемся по всей книге: от «что такое вероятность» до «почему всё стремится к нормальному распределению». Подведем итоги проделанной работы и наметим пути дальнейшего изучения.

Глава 16. Эта глава – ваша тренировочная площадка. Задачи для самостоятельного решения от простых до сложных. Практика – критерий истинности изученной теории.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Звонок на городской телефон:

*— Здравствуйте, у меня есть вероятность услышать
Николая?*

— Вам ее посчитать что ли?

Что такое вероятность?

Представьте, что вы подбрасываете монетку. Что выпадет: орел или решка? Кажется, что это чистая случайность. Но, если подбросить монетку 100 раз, вы заметите, что орел и решка выпадают примерно одинаковое количество раз. Вот тут-то и начинается теория вероятностей.

Вероятность – это наука о том, как измерять шансы. Она помогает нам понять, насколько вероятно то или иное событие. Например:

- Какова вероятность выиграть в лотерею?
- Как часто будет идти дождь в выходные?
- Сколько раз нужно подбросить кубик, чтобы выпала шестерка? А две шестерки?

Теория вероятностей окружает нас повсюду: от прогнозов погоды до разработки искусственного интеллекта. И самое интересное: ее основы можно понять даже в школе.