

А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир

МАТЕМАТИКА

НОВЫЙ ПОЛНЫЙ

СПРАВОЧНИК

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

к **ЕГЭ**

АСТ
Москва
2024

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М52

Мерзляк, Аркадий Григорьевич.

М52 Математика : новый полный справочник для подготовки к ЕГЭ / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва: Издательство АСТ, 2024. — 559, [1] с.: ил. — (Самый популярный справочник для подготовки к ЕГЭ).

ISBN 978-5-17-164869-5

Справочник содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на едином государственном экзамене. Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются экзаменационные задания — контрольные измерительные материалы ЕГЭ.

Справочник состоит из двух глав: «Арифметика. Алгебра» и «Геометрия». Помимо теоретического материала в справочнике представлено значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач. Ко всем заданиям в конце пособия даны ответы для самопроверки.

Работа с пособием позволит повторить все основные темы курса математики за 5–11 классы и успешно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

**УДК 373:51
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-17-164869-5

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., 2024
© ООО «Издательство АСТ», 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|----------------|----|
| Введение | 13 |
|----------------|----|

ГЛАВА I

АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА

| | |
|---|----|
| § 1. Натуральные числа | 17 |
| 1.1. Десятичная запись натуральных чисел | 17 |
| 1.2. Арифметические действия над натуральными числами | 18 |
| 1.3. Делимость натуральных чисел | 19 |
| 1.4. Признаки делимости | 20 |
| 1.5. Простые и составные числа | 21 |
| 1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное | 23 |
| 1.7. Деление с остатком | 25 |
| <i>Примеры заданий № 1.</i> | 26 |
| § 2. Дроби | 29 |
| 2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей | 29 |
| 2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями | 32 |
| 2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей ... | 33 |
| 2.4. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби. | 35 |
| 2.5. Округление чисел. | 36 |
| <i>Примеры заданий № 2.</i> | 37 |
| 2.6. Проценты | 41 |
| 2.7. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам | 42 |
| 2.8. Отношение. Процентное отношение | 43 |
| 2.9. Пропорции | 45 |
| <i>Примеры заданий № 3.</i> | 46 |
| § 3. Числовые множества | 48 |
| 3.1. Понятие о множестве | 48 |
| 3.2. Числовые множества | 50 |

| | |
|--|----|
| 3.3. Координатная прямая | 53 |
| 3.4. Модуль действительного числа | 54 |
| <i>Примеры заданий № 4</i> | 55 |
| § 4. Целые выражения | 58 |
| 4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения | 58 |
| 4.2. Степень с натуральным показателем и её свойства . . . | 59 |
| 4.3. Одночлен | 61 |
| 4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной | 62 |
| 4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов | 64 |
| 4.6. Формулы сокращённого умножения. | 65 |
| 4.7. Разложение многочленов на множители | 67 |
| <i>Примеры заданий № 5</i> | 69 |
| § 5. Дробные выражения | 72 |
| 5.1. Алгебраические (рациональные) дроби | 72 |
| 5.2. Тождество. Тождественные преобразования выражений | 73 |
| 5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей | 73 |
| 5.4. Действия с алгебраическими дробями | 75 |
| <i>Примеры заданий № 6</i> | 78 |
| 5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями | 81 |
| 5.6. Стандартный вид числа | 83 |
| <i>Примеры заданий № 7</i> | 83 |
| § 6. Корень n-й степени. Степень с действительным показателем. | 85 |
| 6.1. Корень n -й степени и его свойства | 85 |
| 6.2. Преобразование выражений, содержащих корни | 87 |
| <i>Примеры заданий № 8</i> | 89 |
| 6.3. Степень с рациональным показателем | 94 |
| 6.4. Преобразование выражений, содержащих степень с рациональным показателем | 95 |
| 6.5. Степень с действительным показателем | 97 |
| <i>Примеры заданий № 9</i> | 99 |

| | |
|---|-----|
| § 7. Формулы тригонометрии. | |
| Преобразование тригонометрических выражений | 103 |
| 7.1. Радианная мера угла. Угол поворота | 103 |
| 7.2. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла поворота . . | 105 |
| 7.3. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса | 108 |
| 7.4. Основные тригонометрические тождества | 109 |
| 7.5. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. | 110 |
| 7.6. Формулы приведения | 111 |
| 7.7. Формулы двойного угла. Формулы понижения степени. | 114 |
| 7.8. Формулы половинного угла. Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла. | 116 |
| 7.9. Сумма и разность синусов (косинусов). | 117 |
| 7.10. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму | 119 |
| 7.11. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс. | 119 |
| <i>Примеры заданий № 10.</i> | 122 |
| § 8. Логарифмы | 127 |
| 8.1. Логарифм числа | 127 |
| 8.2. Свойства логарифмов. | 128 |
| <i>Примеры заданий № 11.</i> | 129 |
| § 9. Функции | 131 |
| 9.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции. | 131 |
| 9.2. Способы задания функции | 132 |
| 9.3. График функции. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы | 134 |
| 9.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции | 138 |
| 9.5. Чётные и нечётные функции. | 140 |
| 9.6. Периодические функции | 141 |
| 9.7. Точки максимума и точки минимума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Ограниченные функции | 142 |
| 9.8. Обратная функция | 145 |
| 9.9. Преобразования графиков функций | 146 |

| | |
|--|-----|
| 9.10. Линейная функция | 151 |
| 9.11. Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ | 152 |
| 9.12. Квадратичная функция | 154 |
| <i>Примеры заданий № 12</i> | 158 |
| 9.13. Степенная функция с натуральным показателем ($y = x^n$, $n \in N$) | 169 |
| 9.14. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ | 170 |
| 9.15. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ | 171 |
| 9.16. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ | 173 |
| 9.17. Показательная функция ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$). | 175 |
| 9.18. Логарифмическая функция ($y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$). | 176 |
| <i>Примеры заданий № 13</i> | 177 |
| § 10. Уравнения с одной переменной | 182 |
| 10.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной | 182 |
| 10.2. Линейное уравнение с одной переменной. | 184 |
| 10.3. Квадратное уравнение | 185 |
| 10.4. Теорема Виета. | 187 |
| 10.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители | 189 |
| 10.6. Рациональные уравнения | 190 |
| <i>Примеры заданий № 14</i> | 192 |
| 10.7. Метод замены переменной. | 194 |
| 10.8. Уравнения, содержащие знак модуля | 196 |
| 10.9. Иррациональные уравнения | 198 |
| <i>Примеры заданий № 15</i> | 201 |
| 10.10. Простейшие тригонометрические уравнения | 203 |
| 10.11. Основные методы решения тригонометрических уравнений | 206 |
| <i>Примеры заданий № 16</i> | 210 |
| 10.12. Показательные уравнения | 215 |
| 10.13. Логарифмические уравнения. | 217 |
| <i>Примеры заданий № 17</i> | 219 |
| 10.14. Уравнения с параметрами | 222 |
| <i>Примеры заданий № 18</i> | 227 |

| | |
|---|-----|
| § 11. Уравнения с двумя переменными и их системы | 231 |
| 11.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения | 231 |
| 11.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом | 233 |
| 11.3. Методы решений системы двух уравнений с двумя переменными | 237 |
| <i>Примеры заданий № 19.</i> | 242 |
| § 12. Применение математических методов для решения прикладных задач | 246 |
| 12.1. Решение прикладных задач с помощью уравнений | 246 |
| <i>Примеры заданий № 20.</i> | 248 |
| 12.2. Решение прикладных задач с помощью систем уравнений | 252 |
| <i>Примеры заданий № 21.</i> | 254 |
| 12.3. Решение прикладных задач арифметическим способом | 256 |
| <i>Примеры заданий № 22.</i> | 257 |
| § 13. Неравенства | 260 |
| 13.1. Общие сведения о неравенствах с одной переменной | 260 |
| 13.2. Числовые промежутки | 261 |
| 13.3. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств | 262 |
| 13.4. Квадратные неравенства | 265 |
| 13.5. Метод интервалов | 267 |
| <i>Примеры заданий № 23.</i> | 270 |
| 13.6. Показательные неравенства | 275 |
| 13.7. Логарифмические неравенства | 277 |
| 13.8. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств | 279 |
| 13.9. Неравенство с двумя переменными и его график | 284 |
| 13.10. Система неравенств с двумя переменными. | 286 |
| <i>Примеры заданий № 24.</i> | 287 |

| | |
|---|-----|
| § 14. Числовые последовательности | 291 |
| 14.1. Понятие последовательности | 291 |
| 14.2. Способы задания последовательности | 292 |
| 14.3. Арифметическая прогрессия | 294 |
| 14.4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии | 295 |
| 14.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов | 296 |
| 14.6. Сумма n первых членов геометрической прогрессии | 299 |
| 14.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы | 300 |
| <i>Примеры заданий № 25</i> | 300 |
| § 15. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики | 303 |
| 15.1. Комбинаторные правила суммы и произведения | 303 |
| 15.2. Перестановки, размещения, сочетания | 305 |
| 15.3. Бином Ньютона | 307 |
| 15.4. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков | 308 |
| <i>Примеры заданий № 26</i> | 310 |
| 15.5. Статистика. Статистические характеристики | 317 |
| 15.5. Частота и вероятность случайного события | 319 |
| 15.7. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности | 320 |
| 15.8. Вычисление вероятностей с помощью правил комбинаторики | 322 |
| <i>Примеры заданий № 27</i> | 325 |
| § 16. Производная и её применение | 329 |
| 16.1. Понятие производной | 329 |
| 16.2. Геометрический и физический смысл производной | 332 |
| 16.3. Правила вычисления производных. Производные основных элементарных функций | 333 |
| 16.4. Уравнение касательной | 337 |
| <i>Примеры заданий № 28</i> | 339 |
| 16.5. Признаки возрастания и убывания функции | 342 |

| | |
|--|-----|
| 16.6. Точки экстремума функции | 343 |
| 16.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке | 346 |
| 16.8. Вторая производная и её физический смысл | 349 |
| 16.9. Исследование свойств функции и построение её графика | 349 |
| <i>Примеры заданий № 29.</i> | 351 |
| § 17. Первообразная и интеграл. | 355 |
| 17.1. Понятие первообразной. Неопределённый интеграл | 355 |
| 17.2. Правила нахождения первообразной | 357 |
| 17.3. Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл | 360 |
| <i>Примеры заданий № 30.</i> | 363 |

ГЛАВА II

ГЕОМЕТРИЯ

| | |
|---|-----|
| § 18. Треугольник. | 371 |
| 18.1. Виды треугольников | 371 |
| 18.2. Признаки равенства треугольников | 372 |
| 18.3. Свойства равнобедренного треугольника | 373 |
| 18.4. Признаки равнобедренного треугольника | 374 |
| 18.5. Сумма углов треугольника. Свойства внешнего угла треугольника | 376 |
| 18.6. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника | 377 |
| 18.7. Терема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках | 379 |
| 18.8. Свойства высот, медиан и биссектрис треугольника | 381 |
| 18.9. Средняя линия треугольника | 382 |
| 18.10. Подобные треугольники | 383 |
| 18.11. Признаки подобия треугольников | 384 |
| <i>Примеры заданий № 31.</i> | 387 |
| 18.12. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике | 390 |

| | |
|---|-----|
| 18.13. Теорема Пифагора | 391 |
| 18.14. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника. | 392 |
| 18.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180° | 395 |
| 18.16. Теорема косинусов | 397 |
| 18.17. Теорема синусов | 398 |
| <i>Примеры заданий № 32</i> | 399 |
| § 19. Окружность | 402 |
| 19.1. Свойства элементов окружности | 402 |
| 19.2. Касательная и секущая к окружности | 403 |
| 19.3. Окружность, описанная около треугольника. | 404 |
| 19.4. Окружность, вписанная в треугольник | 406 |
| 19.5. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности | 408 |
| 19.6. Длина окружности. Площадь круга и площадь сектора | 409 |
| <i>Примеры заданий № 33</i> | 411 |
| § 20. Многоугольник | 416 |
| 20.1. Параллелограмм и его свойства | 416 |
| 20.2. Признаки параллелограмма | 418 |
| 20.3. Прямоугольник, ромб, квадрат | 420 |
| <i>Примеры заданий № 34</i> | 421 |
| 20.4. Трапеция. Средняя линия трапеции. | 424 |
| 20.5. Четырёхугольник, вписанный в окружность. | 426 |
| 20.6. Четырёхугольник, описанный около окружности | 427 |
| 20.7. Сумма углов выпуклого многоугольника. | 428 |
| 20.8. Правильные многоугольники | 428 |
| <i>Примеры заданий № 35</i> | 431 |
| § 21. Площадь многоугольника | 435 |
| 21.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника | 435 |
| 21.2. Площадь параллелограмма. Площадь трапеции | 436 |
| 21.3. Формулы для нахождения площади треугольника | 437 |
| 21.4. Площади подобных многоугольников | 439 |
| <i>Примеры заданий № 36</i> | 440 |

| | |
|--|-----|
| § 22. Параллельность в пространстве | 445 |
| 22.1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве | 445 |
| 22.2. Параллельность прямой и плоскости | 447 |
| 22.3. Параллельность плоскостей | 448 |
| <i>Примеры заданий № 37</i> | 449 |
| § 23. Перпендикулярность в пространстве | 453 |
| 23.1. Угол между прямыми в пространстве | 453 |
| 23.2. Перпендикулярность прямой и плоскости | 455 |
| 23.3. Расстояния в пространстве | 457 |
| 23.4. Теорема о трёх перпендикулярах | 459 |
| 23.5. Угол между прямой и плоскостью | 461 |
| 23.6. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями . . . | 462 |
| 23.7. Перпендикулярные плоскости | 464 |
| <i>Примеры заданий № 38</i> | 466 |
| § 24. Многогранники | 470 |
| 24.1. Призма | 470 |
| 24.2. Параллелепипед | 472 |
| <i>Примеры заданий № 39</i> | 475 |
| 24.3. Пирамида | 478 |
| 24.4. Усечённая пирамида | 481 |
| 24.5. Правильные многогранники | 482 |
| <i>Примеры заданий № 40</i> | 484 |
| § 25. Круглые тела | 487 |
| 25.1. Цилиндр. Комбинации цилиндра с призмой | 487 |
| 25.2. Конус. Усечённый конус | 490 |
| 25.3. Комбинации конуса и усечённого конуса с пирамидой | 493 |
| <i>Примеры заданий № 41</i> | 495 |
| 25.4. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости | 498 |
| 25.5. Многогранники, вписанные в сферу | 500 |
| 25.6. Многогранники, описанные около сферы | 502 |
| <i>Примеры заданий № 42</i> | 503 |
| § 26. Объёмы тел. Площадь сферы | 505 |
| 26.1. Объём тела. Формулы для вычисления объёмов многогранников | 505 |
| <i>Примеры заданий № 43</i> | 507 |

| | |
|--|-----|
| 26.2. Объёмы тел вращения | 510 |
| 26.3. Площадь сферы | 511 |
| <i>Примеры заданий № 44</i> | 511 |
| § 27. Координаты и векторы в пространстве | 515 |
| 27.1. Декартовы координаты точки в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка | 515 |
| 27.2. Уравнение фигуры. Уравнение сферы | 516 |
| 27.3. Векторы в пространстве. Координаты вектора | 518 |
| 27.4. Сложение и вычитание векторов | 521 |
| 27.5. Умножение вектора на число | 524 |
| 27.6. Компланарные векторы. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам | 527 |
| 27.7. Скалярное произведение векторов | 528 |
| 27.8. Уравнение плоскости | 529 |
| <i>Примеры заданий № 45</i> | 531 |
| Ответы к примерам заданий | 535 |

ВВЕДЕНИЕ

На единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике выносятся темы, рассматриваемые в курсах математики 5–6 классов, алгебры 7–9 классов, алгебры и начал анализа 10–11 классов, планиметрии 7–9 классов, стереометрии 10–11 классов. Основой подготовки к ЕГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–11 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Неудобства такого подхода очевидны: во-первых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; во-вторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобнее использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках. Она представляет собой справочник для подготовки к ЕГЭ по математике.

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ЕГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.

Данный справочник выполняет также и свою традиционную роль — позволяет быстро найти нужную информацию: какими свойствами обладает степень с целым показателем, чему равна сумма n первых членов геометрической прогрессии, как найти дробь от числа, по какой формуле можно вычислить площадь трапеции и т. п.

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию кур-

сов математики 5–6 классов, алгебры 7–9 классов, алгебры и начал анализа 10–11 классов; вторая глава «Геометрия» — содержанию курса планиметрии 7–9 классов и стереометрии 10–11 классов. Каждая из глав разбита на параграфы. Их содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ЕГЭ по математике.

Понятно, что для успешного написания ЕГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в справочник включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ЕГЭ по математике.

Большинство проверочных работ состоят из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

Желаем вам успешной сдачи единого государственного экзамена по математике.

ГЛАВА I

**АРИФМЕТИКА.
АЛГЕБРА**