

А. Г. Мордкович, В. И. Глизбург,
Н. Ю. Лаврентьева

МАТЕМАТИКА

НОВЫЙ ПОЛНЫЙ

СПРАВОЧНИК

ШКОЛЬНИКА

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К **ЕГЭ**

Москва
Издательство АСТ
2023

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М79

А в т о р ы:

А. Г. Мордкович, Н. Ю. Лаврентьева
(«Алгебра и начала анализа»)
В. И. Глизбург («Геометрия»)

Мордкович, Александр Григорьевич.

М79 Математика : Новый полный справочник школьника для подготовки к ЕГЭ / А.Г. Мордкович, В.И. Глизбург, Н.Ю. Лаврентьева. — Москва: Издательство АСТ, 2023. — 351, [1] с.: ил. — (Самый популярный справочник для подготовки к ЕГЭ).

ISBN 978-5-17-157069-9

Справочник включает все темы школьного курса и соответствует современным образовательным стандартам и программам. Книга состоит из двух частей: «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия».

Основной материал школьного курса математики изложен авторами сжато и системно: математические понятия, аксиомы, теоремы, свойства и т. д.

Книга будет незаменимым помощником при подготовке к выпускным экзаменам в форме ЕГЭ, при изучении и закреплении нового материала, повторении пройденных тем.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-157069-9

© Мордкович А. Г., Глизбург В. И.,
Лаврентьева Н.Ю., 2021
© ООО «Издательство АСТ», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	11
-------------------	----

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Глава I. Числа

§ 1. Натуральные числа	14
1. Запись натуральных чисел	14
2. Арифметические действия над натуральными числами	15
3. Деление с остатком	16
4. Признаки делимости	17
5. Разложение натурального числа на простые множители	20
6. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел	21
7. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел	22
8. Употребление букв в алгебре. Переменные	23
§ 2. Рациональные числа	24
9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа	24
10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей	26
11. Приведение дробей к общему знаменателю	27
12. Арифметические действия над обыкновенными дробями	29
13. Взаимно обратные числа	31
14. Десятичные дроби	31
15. Проценты	33
16. Множество рациональных чисел	36
§ 3. Действительные числа	37
17. Иррациональные числа	37
18. Действительные числа. Числовая прямая	38
19. Обозначения некоторых числовых множеств	40
20. Сравнение действительных чисел	40
21. Свойства числовых неравенств	41
22. Числовые промежутки	42
23. Модуль действительного числа	44

24. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой	44
25. Правила действий над положительными и отрицательными числами	45
26. Свойства арифметических действий над действительными числами	46
27. Пропорции.	46
28. Степень с натуральным показателем	47
29. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным целым показателем	47
30. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней	48
31. Корень нечетной степени из отрицательного числа . .	49
32. Степень с дробным показателем	50
33. Свойства степеней с рациональными показателями . .	50
34. Понятие о степени с иррациональным показателем . .	51
35. Свойства степеней с действительными показателями	52

Глава II. Алгебраические выражения

§ 4. Основные понятия	53
36. Виды алгебраических выражений	53
37. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения. . .	54
38. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество	55
§ 5. Целые рациональные выражения.	57
39. Одночлены и операции над ними	57
40. Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду	58
41. Формулы сокращенного умножения.	59
42. Разложение многочленов на множители	60
43. Многочлены от одной переменной	63
44. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители	64
45. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$	65
§ 6. Дробные рациональные выражения.	65
46. Рациональная дробь и ее основное свойство	65
47. Сокращение рациональных дробей.	66
48. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю	67
49. Сложение и вычитание рациональных дробей	69
50. Умножение и деление рациональных дробей	71

51. Возведение рациональной дроби в целую степень . . .	72
52. Преобразование рациональных выражений	73
§ 7. Иррациональные выражения	74
53. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов)	74
54. Тождество $\sqrt{a^2} = a $	77
55. Преобразование иррациональных выражений	78

Глава III. **Функции и графики**

§ 8. Определение и свойства функций	80
56. Определение функции	80
57. Аналитическое задание функции	80
58. Табличное задание функции	81
59. Числовая плоскость. Координатная плоскость, оси координат	82
60. График функции, заданной аналитически	83
61. Четные и нечетные функции	85
62. График четной функции. График нечетной функции	86
63. Периодические функции	87
64. Монотонные функции	89
§ 9. Виды функций	90
65. Линейная функция	90
66. Обратная пропорциональность	91
67. Функция $y = x^2$	93
68. Функция $y = x^3$	94
69. Степенная функция с натуральным показателем . . .	94
70. Показательная функция	96
71. Обратная функция. График обратной функции	98
72. Логарифмическая функция	100
73. Число e . Функция $y = e^x$. Функция $y = \ln x$	102
74. Числовая окружность	102
75. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса	104
76. Знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности	105
77. Свойства тригонометрических функций	105
78. Свойства и график функции $y = \sin x$	106
79. Свойства и график функции $y = \cos x$	107
80. Свойства и график функции $y = \operatorname{tg} x$	108
81. Свойства и график функции $y = \operatorname{ctg} x$	109

§ 10. Преобразования графиков	109
82. Построение графика функции $y = mf(x)$	109
83. Графики функций $y = ax^2$, $y = ax^3$	111
84. Построение графика функции $y = f(x - m) + n$	112
85. График квадратичной функции	113
86. Способы построения графика квадратичной функции	116

Глава IV. Трансцендентные выражения

§ 11. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма	119
87. Понятие трансцендентного выражения	119
88. Определение логарифма положительного числа. Натуральные логарифмы	119
89. Свойства логарифмов	120
90. Переход к новому основанию логарифма	122
91. Логарифмирование и потенцирование	123
92. Десятичный логарифм	124

§ 12. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений	124
93. Тригонометрические выражения	124
94. Формулы сложения и вычитания аргументов	125
95. Формулы приведения	126
96. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	127
97. Формулы двойного аргумента	128
98. Формулы понижения степени	129
99. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение	130
100. Преобразование произведений тригонометрических функций в сумму	130

Глава V. Уравнения и системы уравнений

§ 13. Уравнения с одной переменной	131
101. Определение уравнения. Корни уравнения	131
102. Равносильность уравнений	131
103. Линейные уравнения	132
104. Квадратные уравнения	133
105. Неполные квадратные уравнения	135
106. Теорема Виета	135
107. Системы и совокупности уравнений	136

108. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	137
109. Понятие следствия уравнения. Посторонние корни	138
110. Уравнения с переменной в знаменателе	141
111. Область определения уравнения (ОДЗ)	142
112. Рациональные уравнения	144
113. Решение уравнений методом введения новой переменной	145
114. Решение задач с помощью составления уравнений .	146
115. Иррациональные уравнения	151
116. Показательные уравнения	154
117. Логарифмические уравнения	155
118. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс .	157
119. Простейшие тригонометрические уравнения	159
120. Методы решения тригонометрических уравнений .	162
121. Однородные тригонометрические уравнения	163
122. Графическое решение уравнений	165
123. Уравнения с параметром	167
§ 14. Уравнения с двумя переменными	170
124. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения с двумя переменными	170
125. Линейное уравнение с двумя переменными и его график	171
§ 15. Системы уравнений	172
126. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы	172
127. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки	174
128. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения	175
129. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых переменных	176
130. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными	179
131. Решение задач с помощью составления систем уравнений	180
 Глава VI. Неравенства	
§ 16. Решение неравенств	183
132. Основные понятия, связанные с решением неравенств с одной переменной	183

133.	Графическое решение неравенств с одной переменной	184
134.	Линейные неравенства с одной переменной	185
135.	Системы неравенств с одной переменной	186
136.	Совокупность неравенств с одной переменной	188
137.	Квадратные неравенства	188
138.	Графическое решение квадратных неравенств	190
139.	Решение рациональных неравенств методом интервалов	193
140.	Показательные неравенства	196
141.	Логарифмические неравенства	197
142.	Неравенства и системы неравенств с двумя переменными	199

Глава VII. Элементы математического анализа

§ 17. Предел функции	203
143. Предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Горизонтальная асимптота	203
144. Предел функции при $x \rightarrow a$. Непрерывные функции .	203
§ 18. Производная и ее применения	205
145. Приращение аргумента. Приращение функции	205
146. Определение производной	206
147. Формулы дифференцирования. Таблица производных	207
148. Дифференцирование суммы, произведения, частного	208
149. Физический смысл производной	210
150. Вторая производная и ее физический смысл	211
151. Касательная к графику функции	212
152. Применение производной к исследованию функций на монотонность	217
153. Применение производной к исследованию функций на экстремум	219
154. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке	224
155. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин	226
§ 19. Первообразная	231
156. Первообразная	231
157. Таблица первообразных	232
158. Правила вычисления первообразных	233

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

Введение	238
----------------	-----

Глава I. Планиметрия

§ 1. Треугольники, четырехугольники и многоугольники.

Подобие и метрические соотношения	242
---	-----

1. Треугольники	242
2. Четырехугольники	246
3. Примеры	252
4. Многоугольники. Правильные многоугольники	253

§ 2. Окружность. Круг. Вписанные и описанные фигуры.

5. Измерение углов, связанных с окружностью	255
---	-----

6. Касательные к окружности. Метрические соотношения в окружности	257
7. Окружность и треугольник	258
8. Окружность и четырехугольник	259
9. Соотношения между стороной правильного многоугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей	260

§ 3. Тригонометрия в планиметрии.

10. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника	261
11. Теорема синусов	262
12. Теорема косинусов	262
13. Формулы площадей. Метод площадей	262

§ 4. Площади плоских фигур

14. Формулы площади треугольника	264
15. Формулы площади параллелограмма	265
16. Формулы площади ромба	266
17. Формулы площади прямоугольника	266
18. Формулы площади квадрата	266
19. Формулы площади трапеции	266
20. Формулы площади произвольного выпуклого четырехугольника	267
21. Формула площади многоугольника, описанного около окружности	267
22. Формула площади круга и его частей	267
23. Примеры	269

§ 5. Некоторые дополнительные теоремы планиметрии	272
§ 6. Геометрические построения на плоскости	276
24. Инструменты построения	276
25. Аксиомы построения	277
26. Основные построения	277
27. Основные методы решения задач на построение	279
28. Основные геометрические места точек	279
§ 7. Планиметрические задачи	280
Глава II. Стереометрия	
§ 8. Прямые и плоскости в пространстве	286
29. Параллельность прямых и плоскостей	286
30. Перпендикулярность прямых и плоскостей	287
31. Скрещивающиеся прямые	289
32. Основные теоремы	290
33. Углы в пространстве	291
§ 9. Многогранники. Площади поверхностей и объемы	295
34. Пирамида	295
35. Призма	298
36. Правильные многогранники	300
37. Изображение фигур на плоскости	302
§ 10. Геометрические построения в пространстве	303
38. Аксиомы построения	303
39. Основные построения	303
40. Основные геометрические места точек в пространстве	304
41. Построение сечений многогранников	306
§ 11. Тела вращения. Площади поверхностей и объемы	306
42. Цилиндр	306
43. Конус	307
44. Шар	310
§ 12. Стереометрические задачи	312
§ 13. Декартовы координаты. Уравнения фигур	319
§ 14. Векторы	323
Приложение	334
Предметный указатель	344

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемый читатель, вы держите в руках справочник, составленный нами с целью помочь вам быстро и качественно подготовиться к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ).

В настоящее время в 11 классе проводятся два отдельных экзамена по математике — базовый и профильный. Базовый ЕГЭ организуется для выпускников, изучающих математику для общего развития и успешной жизни в обществе, а также абитуриентам вузов, в которых не требуется высокий уровень владения математикой. Баллы, полученные на базовом ЕГЭ по математике, не переводятся в стобалльную шкалу и не дают возможности участия в конкурсе на поступление в вузы. Экзаменационные варианты для ЕГЭ базового уровня содержат только задания базового уровня сложности с кратким ответом. Профильный ЕГЭ проводится для выпускников и абитуриентов, планирующих использовать математику и смежные дисциплины в будущей профессиональной деятельности. Результаты профильного ЕГЭ по математике переводятся в стобалльную шкалу и могут быть представлены абитуриентом на конкурс для поступления в вуз.

Наш справочник содержит материал необходимый для успешной подготовки к экзамену базового уровня и достаточный для подготовки к экзамену профильного уровня.

В нём приведены только основные определения, теоремы и формулы, в первую очередь необходимые вам для решения задач, входящих в состав каждого из вариантов ЕГЭ. Приведены также примеры, аналогичные заданиям ЕГЭ, которые отмечены специальным знаком «•». Также приводятся и примеры, знание которых необходимо для успешной сдачи ЕГЭ, пусть даже точно таких заданий на экзамене нет. Мы их приводим для того, чтобы материала этого справочника вам было достаточно для подготовки.

Дело в том, что математику нельзя изучать с середины. Например, если вы не помните, как производить арифметические действия над обыкновенными дробями, и забыли, что означает аббревиатура НОД, то правила сложения, вычитания умножения и деления для алгебраических дробей останутся для вас непонятными. Отметим, что для строгого определения некоторых математических понятий необходимы глубокие знания высшей математики, поэтому многие определения нами даны в упрощённой «школьной» трактовке.

И, конечно, не забывайте, что для удачного написания ЕГЭ, вам прежде всего надо научиться решать задачи. В справочнике приводятся подробно разобранные примеры решений задач разной степени сложности.

В книге весь материал, необходимый для подготовки к ЕГЭ, изложен по темам: справочник открывается параграфом «Натуральные числа» и закрывается параграфом «Векторы». В тексте некоторые понятия выделены курсивом. Это означает, что в справочнике приводятся их определения или формулировки и разъяснения. Для простоты использования справочника в нём также приводятся номера разделов параграфов, где подробно излагаются сведения, необходимые для решения той или иной задачи.

Желаем вам успешно подготовиться и сдать единый государственный экзамен по математике.

Удачи!

В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий рекомендуем в процессе подготовки к экзамену обращаться к материалам сайта официального разработчика экзаменационных заданий — Федерального института педагогических измерений: www.fipi.ru.

Часть первая

**АЛГЕБРА
И НАЧАЛА
АНАЛИЗА**

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , используемые для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называют *натуральными*. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывают с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков, 7 — цифра единиц, т. е. $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Вообще, если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков, d — цифра единиц, то имеем

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Используется также сокращенная запись \overline{abcd} (написать $abcd$ нельзя, так как такая запись в соответствии с принятым в математике соглашением означает произведение чисел a, b, c, d). Аналогично, запись \overline{abcde} означает число

$$a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e,$$

причем $a \neq 0$.

Пример*. Нина задумала четырехзначное число, сумма цифр которого равна 14. Известно, что это число не изменится, если записать его теми же цифрами, но в обратном порядке, и что число, образованное первыми двумя его цифрами, на 27 больше числа, образованного двумя последними его цифрами. Какое число задумала Нина?

Решение. Поскольку число не меняется при записи в обратном порядке, то равны первая и последняя цифры, а также равны вторая и третья.

Пусть первая цифра x , вторая — y . Тогда можно составить систему уравнений (см. п. 126)

$$\begin{cases} 2x + 2y = 14, \\ 10x + y = 10y + x - 27 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = 7, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Решения системы — числа $x = 2$ и $y = 5$. Следовательно, искомое число равно 2552.

О т в е т: 2552.

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m , n — натуральные числа, то $p = m + n$ — тоже натуральное число, m и n — *слагаемые*, p — *сумма*; $p = mn$ — тоже натуральное число, m , n — *множители*, p — *произведение*.

Справедливы следующие свойства сложения и умножения натуральных чисел:

1°. $a + b = b + a$ (*переместительное* свойство сложения).

2°. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*сочетательное* свойство сложения).

3°. $ab = ba$ (*переместительное* свойство умножения).

4°. $(ab)c = a(bc)$ (*сочетательное* свойство умножения).

5°. $a(b + c) = ab + ac$ (*распределительное* свойство умножения относительно сложения).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число: например, $7 - 4 = 3$ — натуральное число, тогда как $4 - 7 = -3$ — не натуральное число; $21 : 7 = 3$ — натуральное число, тогда как $11 : 2 = 5,5$ — не натуральное число.