

М. Я. Выгодский

СПРАВОЧНИК по ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ



Москва
Издательство АСТ
2022

УДК 510(035)
ББК 22.1я2
В92

Выгодский, Марк Яковлевич.

В92 Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. — Москва: Издательство АСТ, 2022. — 703, [1] с.: ил. — (Справочники Выгодского).
ISBN 978-5-17-117741-6

Справочник включает весь материал, входящий в программу основного курса математики высших учебных заведений. Детальная рубрикация и подробный предметный указатель позволяют читателю легко и быстро найти необходимую информацию.

Книга окажет неоценимую помощь студентам, инженерам и научным работникам.

УДК 510(035)
ББК 22.1я2

ISBN 978-5-17-117741-6

© Выгодский М.Я., 2022
© ООО «Издательство АСТ», 2022

Содержание

I. Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1. Понятие о предмете аналитической геометрии	9	§ 42. Построение эллипса по его осям	45
2. Координаты	9	43. Гипербола	46
3. Прямоугольная система координат	10	44. Форма гиперболы; вершины и оси	47
4. Прямоугольные координаты	10	45. Построение гиперболы по ее осям	48
5. Координатные углы	11	46. Асимптоты гиперболы	48
6. Косоугольная система координат	12	47. Сопряженные гиперболы	49
7. Уравнение линии	12	48. Парабола	50
8. Взаимное расположение линии и точки	13	49. Построение параболы по данному параметру p	51
9. Взаимное расположение двух линий	14	§ 50. Парабола как график уравнения $y = ax^2 + bx + c$	51
10. Расстояние между двумя точками	14	§ 51. Директрисы эллипса и гиперболы	54
11. Деление отрезка в данном отношении	15	§ 52. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы	55
11а. Деление отрезка пополам	16	§ 53. Конические сечения	56
12. Определитель второго порядка	16	§ 54. Диаметры конического сечения	57
13. Площадь треугольника	16	§ 55. Диаметры эллипса	57
14. Прямая линия; уравнение, разрешенное относительно ординаты (с угловым коэффициентом)	17	§ 56. Диаметры гиперболы	59
15. Прямая, параллельная оси	18	§ 57. Диаметры параболы	61
16. Общее уравнение прямой	19	§ 58. Линии второго порядка	61
17. Построение прямой по ее уравнению	20	§ 59. Запись общего уравнения второй степени	63
18. Условие параллельности прямых	20	§ 60. Упрощение уравнения второй степени; общие замечания	63
19. Пересечение прямых	22	§ 61. Предварительное преобразование уравнения второй степени	64
20. Условие перпендикулярности двух прямых	22	§ 62. Завершающее преобразование уравнения второй степени	66
21. Угол между двумя прямыми	23	§ 63. О приемах, облегчающих упрощение уравнения второй степени	71
22. Условие, при котором три точки лежат на одной прямой	25	§ 64. Признак распадаения линий второго порядка	71
§ 23. Уравнение прямой, проходящей через две точки	26	§ 65. Нахождение прямых, составляющих распадающуюся линию второго порядка	72
24. Пучок прямых	27	§ 66. Инварианты уравнения второй степени	75
25. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой	29	§ 67. Три типа линий второго порядка	77
§ 26. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой	29	§ 68. Центральные и нецентральные линии второго порядка	79
§ 27. Взаимное расположение прямой и пары точек	30	§ 69. Нахождение центра центральной линии второго порядка	80
28. Расстояние от точки до прямой	30	§ 70. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка	81
29. Полярные параметры прямой	31	§ 71. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{k}{x}$	83
30. Нормальное уравнение прямой	33	§ 72. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{mx+n}{px+q}$	84
31. Приведение уравнения прямой к нормальному виду	34	§ 73. Полярные координаты	86
32. Отрезки на осях	34	§ 74. Связь между полярными и прямоугольными координатами	87
33. Уравнение прямой в отрезках	35	§ 75. Архимедова спираль	89
34. Преобразование координат (постановка вопроса)	36	§ 76. Полярное уравнение прямой	90
35. Перенос начала координат	36	§ 77. Полярное уравнение конического сечения	91
36. Поворот осей	37		
37. Алгебраические линии и их порядок	38		
38. Окружность	40		
39. Нахождение центра и радиуса окружности	40		
40. Эллипс как сжатая окружность	41		
41. Другое определение эллипса	43		

II. Аналитическая геометрия в пространстве

1. Понятие о векторах и скалярах	92	§ 15. Проекция вектора на ось	99
2. Вектор в геометрии	92	§ 16. Основные теоремы о проекциях вектора	101
3. Векторная алгебра	92	§ 17. Прямоугольная система координат в пространстве	102
4. Коллинеарные векторы	92	§ 18. Координаты точки	103
5. Нуль-вектор	93	§ 19. Координаты вектора	103
6. Равенство векторов	93	§ 20. Выражения вектора через компоненты и через координаты	104
7. Приведение векторов к общему началу	94	§ 21. Действия над векторами, заданными своими координатами	105
8. Противоположные векторы	94	§ 22. Выражение вектора через радиусы-векторы его начала и конца	105
9. Сложение векторов	94	§ 23. Длина вектора. Расстояние между двумя точками	106
10. Сумма нескольких векторов	95	§ 24. Угол между осями координат и вектором	106
11. Вычитание векторов	96		
12. Умножение и деление вектора на число	97		
13. Взаимная связь коллинеарных векторов (деление вектора на вектор)	98		
§ 14. Проекция точки на ось	98		

§ 25. Признак коллинеарности (параллельности) векторов	107	§ 75. Параметрические уравнения прямой	148
§ 26. Деление отрезка в данном отношении	107	§ 76. Пересечение плоскости с прямой, заданной параметрически	149
§ 27. Скалярное произведение двух векторов	108	§ 77. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки	150
§ 27а. Физический смысл скалярного произведения	109	§ 78. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой	150
§ 28. Свойства скалярного произведения	109	§ 79. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости	150
§ 29. Скалярные произведения основных векторов	111	§ 80. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и данную прямую	151
§ 30. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей	111	§ 81. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум данным прямым	151
§ 31. Условие перпендикулярности векторов	112	§ 82. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной другой данной прямой	152
§ 32. Угол между векторами	112	§ 83. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной данной плоскости	152
§ 33. Правая и левая системы трех векторов	113	§ 84. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую	153
§ 34. Векторное произведение двух векторов	114	§ 85. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую	154
§ 35. Свойства векторного произведения	116	§ 86. Условие, при котором две прямые пересекаются или лежат в одной плоскости	155
§ 36. Векторные произведения основных векторов	117	§ 87. Уравнения общего перпендикуляра к двум данным прямым	156
§ 37. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей	117	§ 88. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми	158
§ 38. Компланарные векторы	119	§ 88а. Правые и левые пары прямых	159
§ 39. Смешанное произведение	119	§ 89. Преобразование координат	160
§ 40. Свойства смешанного произведения	120	§ 90. Уравнение поверхности	161
§ 41. Определитель третьего порядка	121	§ 91. Цилиндрические поверхности, у которых образующие параллельны одной из осей координат	162
§ 42. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей	123	§ 92. Уравнения линии	163
§ 43. Признак компланарности в координатной форме	124	§ 93. Проекция линии на координатную плоскость	164
§ 44. Объем параллелепипеда	124	§ 94. Алгебраические поверхности и их порядок	165
§ 45. Двойное векторное произведение	125	§ 95. Сфера	166
§ 46. Уравнение плоскости	125	§ 96. Эллипсоид	167
§ 47. Особые случаи положения плоскости относительно системы координат	126	§ 97. Однополостный гиперболоид	169
§ 48. Условие параллельности плоскостей	127	§ 98. Двуполостный гиперболоид	171
§ 49. Условие перпендикулярности плоскостей	127	§ 99. Конус второго порядка	172
§ 50. Угол между двумя плоскостями	128	§ 100. Эллиптический параболоид	174
§ 51. Плоскость, проходящая через данную точку параллельно данной плоскости	128	§ 101. Гиперболический параболоид	175
§ 52. Плоскость, проходящая через три точки	129	§ 102. Перечень поверхностей второго порядка	176
§ 53. Отрезки на осях	129	§ 103. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка	178
§ 54. Уравнение плоскости в отрезках	129	§ 104. Поверхности вращения	179
§ 55. Плоскость, проходящая через две точки перпендикулярно данной плоскости	130	§ 105. Определители второго и третьего порядков	180
§ 56. Плоскость, проходящая через данную точку перпендикулярно двум плоскостям	130	§ 106. Определители высших порядков	183
§ 57. Точка пересечения трех плоскостей	131	§ 107. Свойства определителей	185
§ 58. Взаимное расположение плоскости и пары точек	132	§ 108. Практический прием вычисления определителей	187
§ 59. Расстояние от точки до плоскости	132	§ 109. Применение определителей к исследованию и решению системы уравнений	189
§ 60. Полярные параметры плоскости	133	§ 110. Два уравнения с двумя неизвестными	189
§ 61. Нормальное уравнение плоскости	134	§ 111. Два уравнения с тремя неизвестными	191
§ 62. Приведение уравнения плоскости к нормальному виду	135	§ 112. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными	193
§ 63. Уравнения прямой в пространстве	136	§ 113. Три уравнения с тремя неизвестными	194
§ 64. Условие, при котором два уравнения первой степени представляют прямую	138	§ 113а. Система l уравнений с l неизвестными	197
§ 65. Пересечение прямой с плоскостью	138		
§ 66. Направляющий вектор	140		
§ 67. Углы между прямой и осями координат	141		
§ 68. Угол между двумя прямыми	141		
§ 69. Угол между прямой и плоскостью	142		
§ 70. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости	143		
§ 71. Пучок плоскостей	143		
§ 72. Проекция прямой на координатные плоскости	145		
§ 73. Симметричные уравнения прямой	146		
§ 74. Приведение уравнений прямой к симметричному виду	147		

III. Основные понятия математического анализа

1. Вводные замечания	200	§ 21. Распирение понятия предела	217
2. Рациональные числа	200	§ 22. Основные свойства бесконечно малых величин	218
3. Действительные (вещественные) числа	201	§ 23. Основные теоремы о пределах	219
4. Числовая ось	202	§ 24. Число e	220
5. Переменные и постоянные величины	202	§ 25. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	221
6. Функция	202	§ 26. Эквивалентные бесконечно малые величины	222
7. Способы задания функции	204	§ 27. Сравнение бесконечно малых величин	223
8. Область определения функции	206	§ 27а. Приращение переменной величины	224
9. Промежуток	207	§ 28. Непрерывность функции в точке	225
10. Классификация функций	208	§ 29. Свойства функций, непрерывных в точке	225
11. Основные элементарные функции	209	§ 29а. Односторонний предел; скачок функции	226
12. Обозначение функции	210	§ 30. Непрерывность функции на замкнутом промежутке	227
13. Предел последовательности	211	§ 31. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке	227
14. Предел функции	212		
15. Определение предела функции	214		
16. Предел постоянной величины	215		
17. Бесконечно малая величина	215		
18. Бесконечно большая величина	215		
19. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами	216		
§ 20. Ограниченные величины	216		

IV. Дифференциальное исчисление

1. Вводные замечания	229	§ 34. Уравнение нормали	263
2. Скорость	229	§ 35. Производные высших порядков	264
3. Определение производной функции	230	§ 36. Механический смысл второй производной	265
4. Касательная	232	§ 37. Дифференциалы высших порядков	266
5. Производные некоторых простейших функций	233	§ 38. Выражение высших производных через дифференциалы	268
6. Свойства производной	234	§ 39. Высшие производные функций, заданных параметрически	269
7. Дифференциал	234	§ 40. Высшие производные неявных функций	269
8. Механический смысл дифференциала	235	§ 41. Правило Лейбница	270
9. Геометрический смысл дифференциала	236	§ 42. Теорема Ролля	272
10. Дифференцируемые функции	236	§ 43. Теорема Лагранжа о среднем значении	272
11. Дифференциалы некоторых простейших функций	238	§ 44. Формула конечных приращений	274
12. Свойства дифференциала	238	§ 45. Обобщенная теорема о среднем значении (Коши)	276
13. Инвариантность выражения $f'(x) dx$	239	§ 46. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$	278
14. Выражение производной через дифференциалы	239	§ 47. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$	280
§ 15. Функция от функции (сложная функция)	240	§ 48. Неопределенные выражения других видов	281
§ 16. Дифференциал сложной функции	240	§ 49. Исторические сведения о формуле Тейлора	282
§ 17. Производная сложной функции	241	§ 50. Формула Тейлора	286
§ 18. Дифференцирование произведения	242	§ 51. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции	287
§ 19. Дифференцирование частного (дроби)	243	§ 52. Возрастание и убывание функции	294
§ 20. Обратная функция	244	§ 53. Признаки возрастания и убывания функции в точке	295
§ 21. Натуральные логарифмы	245	§ 53а. Признаки возрастания и убывания функции в промежутке	296
§ 22. Дифференцирование логарифмической функции	246	§ 54. Максимум и минимум	296
§ 23. Логарифмическое дифференцирование	247	§ 55. Необходимое условие максимума и минимума	297
§ 24. Дифференцирование показательной функции	248	§ 56. Первое достаточное условие максимума и минимума	298
§ 25. Дифференцирование тригонометрических функций	249	§ 57. Правило нахождения максимумов и минимумов	299
§ 26. Дифференцирование обратных тригонометрических функций	250	§ 58. Второе достаточное условие максимума и минимума	302
§ 26а. Некоторые поучительные примеры	251	§ 59. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции	303
§ 27. Дифференциал в приближенных вычислениях	253	§ 60. Выпуклость плоских кривых; точка перегиба	309
§ 28. Применение дифференциала к оценке погрешности формул	254	§ 61. Сторона вогнутости	310
§ 29. Дифференцирование неявных функций	256		
§ 30. Параметрическое задание линии	258		
§ 31. Параметрическое задание функции	259		
§ 32. Циклоида	260		
§ 33. Уравнение касательной к плоской линии	262		
§ 33а. Касательные к кривым второго порядка	263		

§ 62. Правило для нахождения точек перегиба	311
§ 63. Асимптоты	312
§ 64. Нахождение асимптот, параллельных координатным осям	313
§ 65. Нахождение асимптот, не параллельных оси ординат	314

V. Интегральное исчисление

§ 1. Вводные замечания	327
§ 2. Первообразная функция	328
§ 3. Неопределенный интеграл	329
§ 4. Геометрический смысл интегрирования	331
§ 5. Вычисление постоянной интегрирования по начальным данным	332
§ 6. Свойства неопределенного интеграла	333
§ 7. Таблица интегралов	334
§ 8. Непосредственное интегрирование	336
§ 9. Способ подстановки (интегрирование через вспомогательную переменную)	337
§ 10. Интегрирование по частям	340
§ 11. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений	342
§ 12. Тригонометрические подстановки	345
§ 13. Рациональные функции	346
§ 13а. Исключение целой части	347
§ 14. О приемах интегрирования рациональных дробей	347
§ 15. Интегрирование простейших рациональных дробей	348
§ 16. Интегрирование рациональных функций (общий метод)	351
§ 17. О разложении многочлена на множители	356
§ 18. Об интегрируемости в элементарных функциях	357
§ 19. Некоторые интегралы, зависящие от радикалов	358
§ 20. Интеграл от биномиального дифференциала	359
§ 21. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	361
§ 22. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$	363
§ 23. Определенный интеграл	363
§ 24. Свойства определенного интеграла	367
§ 25. Геометрический смысл определенного интеграла	368

VI. Основные сведения о плоских и пространственных линиях

§ 1. Кривизна	408
§ 2. Центр, радиус и круг кривизны плоской линии	408
§ 3. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны плоской линии	410
§ 4. Эволюта плоской линии	412
§ 5. Свойства эволюты плоской линии	414
§ 6. Развертка (эвольвента) плоской линии	415
§ 7. Параметрическое задание пространственной линии	415
§ 8. Винтовая линия	417
§ 9. Длина дуги пространственной линии	418
§ 10. Касательная к пространственной линии	419
§ 11. Нормальная плоскость	420
§ 12. Вектор-функция скалярного аргумента	421
§ 13. Предел вектор-функции	422

§ 66. Приемы построения графиков	316
§ 67. Решение уравнений. Общие замечания	319
§ 68. Решение уравнений. Способ хорд	321
§ 69. Решение уравнений. Способ касательных	322
§ 70. Комбинированный метод хорд и касательных	324

§ 26. Механический смысл определенного интеграла	369
§ 27. Оценка определенного интеграла	370
§ 27а. Неравенство Буняковского	371
§ 28. Теорема о среднем интегральном исчислении	371
§ 29. Определенный интеграл как функция верхнего предела	373
§ 30. Дифференциал интеграла	374
§ 31. Интеграл дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница	376
§ 32. Вычисление определенного интеграла с помощью неопределенного	377
§ 33. Определенное интегрирование по частям	378
§ 34. Способ подстановки в определенном интеграле	379
§ 35. О несобственных интегралах	383
§ 36. Интегралы с бесконечными пределами	383
§ 37. Интеграл функции, имеющей разрыв	387
§ 38. О приближенном вычислении интеграла	390
§ 39. Формулы прямоугольников	392
§ 40. Формула трапеций	394
§ 41. Формула Симпсона (параболических трапеций)	395
§ 42. Площади фигур, отнесенных к прямоугольным координатам	396
§ 43. Схема применения определенного интеграла	398
§ 44. Площади фигур, отнесенных к полярным координатам	400
§ 45. Объем тела по поперечным сечениям	401
§ 46. Объем тела вращения	403
§ 47. Длина дуги плоской линии	403
§ 48. Дифференциал дуги	405
§ 49. Длина дуги и ее дифференциал в полярных координатах	405
§ 50. Площадь поверхности вращения	407

§ 14. Производная вектор-функции	422
§ 15. Дифференциал вектор-функции	424
§ 16. Свойства производной и дифференциала вектор-функции	425
§ 17. Соприкасающаяся плоскость	426
§ 18. Главная нормаль. Сопутствующий трехгранник	427
§ 19. Взаимное расположение линии и плоскости	428
§ 20. Основные векторы сопутствующего трехгранника	429
§ 21. Центр, ось и радиус кривизны пространственной линии	430
§ 22. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны пространственной линии	431
§ 23. О знаке кривизны	433
§ 24. Кручение	434

VII. Ряды

§ 1. Вводные замечания	436	§ 29. Нахождение радиуса сходимости	470
§ 2. Определение ряда	436	§ 30. Область сходимости ряда, расположенного по степеням $x - x_0$	471
§ 3. Сходящиеся и расходящиеся ряды	437	§ 31. Теорема Абеля	472
§ 4. Необходимое условие сходимости ряда	438	§ 32. Действия со степенными рядами	472
§ 5. Остаток ряда	440	§ 33. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда	474
§ 6. Простейшие действия над рядами	441	§ 34. Ряд Тейлора	476
§ 7. Положительные ряды	442	§ 35. Разложение функции в степенной ряд	477
§ 8. Сравнение положительных рядов	443	§ 36. Разложение элементарных функций в степенные ряды	479
§ 9. Признак Даламбера для положительного ряда	444	§ 37. Применение рядов к вычислению интегралов	482
§ 10. Интегральный признак сходимости	446	§ 38. Гиперболические функции	484
§ 11. Знакопеременный ряд. Признак Лейбница	448	§ 39. Обратные гиперболические функции	486
§ 12. Абсолютная и условная сходимость	449	§ 40. Происхождение наименований гиперболических функций	488
§ 13. Признак Даламбера для произвольного ряда	450	§ 41. О комплексных числах	489
§ 14. Перестановка членов ряда	450	§ 42. Комплексная функция действительного аргумента	489
§ 15. Группировка членов ряда	451	§ 43. Производная комплексной функции	491
§ 16. Умножение рядов	453	§ 44. Возведение положительного числа в комплексную степень	492
§ 17. Деление рядов	455	§ 45. Формула Эйлера	493
§ 18. Функциональный ряд	457	§ 46. Тригонометрический ряд	494
§ 19. Область сходимости функционального ряда	457	§ 47. Исторические сведения о тригонометрических рядах	494
§ 20. О равномерной и неравномерной сходимости	459	§ 48. Ортогональность системы функций $\cos nx, \sin nx$	495
§ 21. Определение равномерной и неравномерной сходимости	461	§ 49. Формулы Эйлера—Фурье	496
§ 22. Геометрический смысл равномерной и неравномерной сходимости	461	§ 50. Ряд Фурье	498
§ 23. Признак равномерной сходимости; правильные ряды	462	§ 51. Ряд Фурье для непрерывной функции	499
§ 24. Непрерывность суммы ряда	463	§ 52. Ряд Фурье для четной и нечетной функции	502
§ 25. Интегрирование рядов	464	§ 53. Ряд Фурье для разрывной функции	505
§ 26. Дифференцирование рядов	467		
§ 27. Степенной ряд	468		
§ 28. Промежутки и радиус сходимости степенного ряда	468		

VIII. Дифференцирование и интегрирование функций нескольких аргументов

§ 1. Функция двух аргументов	508	§ 20. Дифференцирование сложной функции	525
§ 2. Функция трех и большего числа аргументов	509	§ 21. Замена прямоугольных координат полярными	526
§ 3. Способы задания функций нескольких аргументов	509	§ 22. Формулы для производных сложной функции	527
§ 4. Предел функции нескольких аргументов	511	§ 23. Полная производная	527
§ 5. О порядке малости функции нескольких аргументов	512	§ 24. Дифференцирование неявной функции нескольких переменных	528
§ 6. Непрерывность функции нескольких аргументов	514	§ 25. Частные производные высших порядков	531
§ 7. Частные производные	515	§ 26. Полные дифференциалы высших порядков	532
§ 8. Геометрический смысл частных производных для случая двух аргументов	515	§ 27. Техника повторного дифференцирования	534
§ 9. Полное и частное приращения	516	§ 28. Условное обозначение дифференциалов	535
§ 10. Частный дифференциал	517	§ 29. Формула Тейлора для функции нескольких аргументов	535
§ 11. О выражении частной производной через дифференциал	517	§ 30. Экстремум (максимум и минимум) функции нескольких аргументов	537
§ 12. Полный дифференциал	518	§ 31. Правило нахождения экстремума	538
§ 13. Геометрический смысл полного дифференциала (случай двух аргументов)	520	§ 32. Достаточные условия экстремума (случай двух аргументов)	539
§ 14. Инвариантность выражения $f'_x dx +$ $+ f'_y dy + f'_z dz$ полного дифференциала	520	§ 33. Двойной интеграл	540
§ 15. Техника дифференцирования	521	§ 34. Геометрический смысл двойного интеграла	541
§ 16. Дифференцируемые функции	522	§ 35. Свойства двойного интеграла	542
§ 17. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	523	§ 36. Оценка двойного интеграла	542
§ 18. Уравнение касательной плоскости	524	§ 37. Вычисление двойного интеграла (простейший случай)	542
§ 19. Уравнения нормали	525	§ 38. Вычисление двойного интеграла (общий случай)	545
		§ 39. Функция точки	548

§ 40. Выражение двойного интеграла через полярные координаты	548	§ 50. Момент инерции	559
§ 41. Площадь куска поверхности	551	§ 51. Выражение некоторых физических и геометрических величин через двойные интегралы	561
§ 42. Тройной интеграл	553	§ 52. Выражение некоторых физических и геометрических величин через тройные интегралы	562
§ 43. Вычисление тройного интеграла (простейший случай)	554	§ 53. Криволинейный интеграл	563
§ 44. Вычисление тройного интеграла (общий случай)	554	§ 54. Механический смысл криволинейного интеграла	564
§ 45. Цилиндрические координаты	556	§ 55. Вычисление криволинейного интеграла	565
§ 46. Выражение тройного интеграла через цилиндрические координаты	556	§ 56. Формула Грина	566
§ 47. Сферические координаты	557	§ 57. Условие, при котором криволинейный интеграл не зависит от пути	567
§ 48. Выражение тройного интеграла через сферические координаты	557	§ 58. Другая форма условия предыдущего параграфа	568
§ 49. Схема применения двойного и тройного интегралов	558		

IX. Дифференциальные уравнения

1. Основные понятия	571	§ 15. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов	590
2. Уравнение первого порядка	572	§ 16. О составлении дифференциальных уравнений	592
3. Геометрический смысл уравнения первого порядка	573	§ 17. Уравнение второго порядка	595
4. Изоклины	575	§ 18. Уравнение n -го порядка	597
5. Частное и общее решения уравнения первого порядка	576	§ 19. Случай понижения порядка	597
§ 6. Уравнения с разделенными переменными	577	§ 20. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	598
§ 7. Разделение переменных. Особое решение	578	§ 21. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части	600
§ 8. Уравнение в полных дифференциалах	580	§ 22. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	600
8а. Интегрирующий множитель	580	§ 22а. Связь между случаями 1 и 3 § 22	603
9. Однородное уравнение	581	§ 23. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью	604
10. Линейное уравнение первого порядка	583	§ 24. Линейные уравнения любого порядка	609
11. Уравнение Клеро	585	§ 25. Метод вариации постоянных	610
12. Обгибающая	587	§ 26. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы	612
§ 13. Об интегрируемости дифференциальных уравнений	588		
§ 14. Приближенное интегрирование уравнений первого порядка по методу Эйлера	588		

X. Некоторые замечательные кривые

1. Стрелоид	614	§ 9. Архимедова спираль	635
2. Циссоида Диокла	616	§ 10. Эвольвента (развертка) круга	637
3. Декартов лист	617	§ 11. Логарифмическая спираль	640
4. Верзьева Аньези	619	§ 12. Циклоиды	645
5. Конхоида Никомеда	621	§ 13. Эпициклоиды и гипоциклоиды	657
6. Улитка Паскаля; кардиоида	625	§ 14. Трактриса	670
7. Линия Кассини	629	§ 15. Цепная линия	675
8. Лемниската Бернулли	633		

Таблицы

1. Натуральные логарифмы	679	3. Таблица для перехода от десятичных логарифмов к натуральным	682
2. Таблица для перехода от натуральных логарифмов к десятичным	682	4. Таблица неопределенных интегралов	683

Предметно-именной указатель	691
---------------------------------------	-----

І. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Понятие о предмете аналитической геометрии

В *элементарной геометрии* изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности. Это и составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

Аналитическая геометрия возникла из потребности создать единые средства для решения геометрических задач, с тем чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы.

Эта цель была достигнута созданием *координатного метода* (см. ниже, §§ 2—4). В нем ведущую роль играют вычисления, построения же имеют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач методом аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

Создание координатного метода было подготовлено трудами древнегреческих математиков, в особенности *Аполлония* (III—II в. до н. э.). Систематическое развитие координатный метод получил в первой половине XVII века в работах *П. Ферма*¹⁾ и *Р. Декарта*²⁾. Они, однако, рассматривали только плоские линии. К систематическому изучению пространственных линий и поверхностей координатный метод был применен впервые *Л. Эйлером*³⁾.

§ 2. Координаты

Координатами точки называются такие величины, которые определяют положение этой точки (в пространстве, на плоской или на кривой поверхности, на прямой или кривой линии). Так, если, например, точка *M* должна лежать где-нибудь на прямой линии *X'X* (рис. 1), то ее положение можно определить одним числом, например, следующим образом: выбрав на *X'X* какую-либо начальную точку *O*, измерим отрезок *OM*, скажем, в сантиметрах. Мы получим число *x*, положительное или отрицательное, в зависимости от того, куда направлен отрезок *OM* (вправо или влево, если прямая горизонтальна). Число *x* есть координата точки *M*.

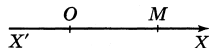


Рис. 1

¹⁾ *Пьер Ферма* (1601—1665) — знаменитый французский математик, один из предшественников Ньютона и Лейбница в разработке дифференциального исчисления; внес большой вклад в теорию чисел. Большинство работ Ферма (в том числе по аналитической геометрии) не публиковалось при жизни автора.

²⁾ *Рене Декарт* (1596—1650) — знаменитый французский философ и математик. Опубликование его «Геометрии» (одно из приложений к философскому трактату «Рассуждение о методе») в 1637 г. считается (условно) датой рождения аналитической геометрии.

³⁾ *Леонард Эйлер* (1707—1783) родился в Швейцарии. В 1727 г. прибыл в Россию; работал сначала в качестве адъюнкта (научного сотрудника) Петербургской академии наук, а затем (с 1733 г.) в качестве ее академика. Написал свыше 800 работ. Во всех физико-математических науках сделал важнейшие открытия. Много содействовал развитию русской науки.

Значение координаты x зависит от выбора начальной точки O , от выбора положительного направления на прямой и от того, какой отрезок принят за единицу масштаба.

§ 3. Прямоугольная система координат

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Простейший способ таков.

Проводятся две взаимно перпендикулярные прямые $X'X$, $Y'Y$ (рис. 2). Они называются *осями координат*. Одна из них $X'X$ (обычно ее проводят горизонтально) называется *осью абсцисс*, другая $Y'Y$ — *осью ординат*. Точка O их пересечения называется *началом координат*, или, короче, *началом*. Для измерения отрезков на осях координат выбирается некоторая единица масштаба, произвольная, но одна и та же для обеих осей.

На каждой оси выбирается положительное направление (обозначаемое стрелкой). На рис. 2 луч OX дает положительное направление на оси абсцисс, а луч OY — на оси ординат.

Принято выбирать положительные направления так, чтобы положительный луч OX после поворота на 90° против часовой стрелки совмещался с положительным лучом OY (рис. 3).

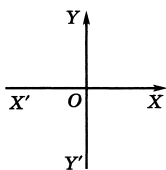


Рис. 2

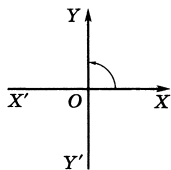


Рис. 3

Оси координат $X'X$, $Y'Y$ (с установленными положительными направлениями и выбранным масштабом) образуют *прямоугольную систему координат*.

§ 4. Прямоугольные координаты

Положение точки M на плоскости в прямоугольной системе координат (§ 3) определяется следующим образом. Проводим $MP \parallel Y'Y$ до пересечения с осью $X'X$ в точке P (рис. 4) и $MQ \parallel X'X$ до пересечения с осью $Y'Y$ в точке Q . Числа x и y , измеряющие отрезки OP и OQ в избранном масштабе (а иногда и сами эти отрезки), называются *прямоугольными координатами* (короче *координатами*) точки M . Эти числа берем положительными или отрицательными в зависимости от направления отрезков OP , OQ . Число x называется *абсциссой* точки M , число y — ее *ординатой*.

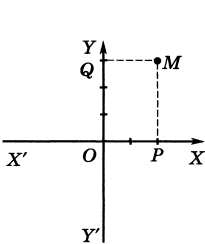


Рис. 4

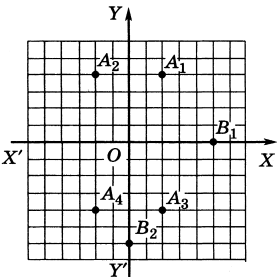


Рис. 5

На рис. 4 точка M имеет абсциссу $x = 2$ и ординату $y = 3$ (при единице масштаба $0,4$ см). Это записывается так: $M(2; 3)$. Вообще запись $M(a; b)$ означает, что точка M имеет абсциссу

$$x = a$$

и ординату

$$y = b.$$

Примеры. Отмеченные на рис. 5 точки регистрируются так: $A_1(+2; +4)$, $A_2(-2; +4)$, $A_3(+2; -4)$, $A_4(-2; -4)$, $B_1(+5; 0)$, $B_2(0; -6)$, $O(0; 0)$.

З а м е ч а н и е. Координаты данной точки M будут иными в другой прямоугольной системе координат.

§ 5. Координатные углы

Четыре угла, образованные осями координат, носят название *координатных углов*. Они нумеруются, как показано на рис. 6. Следующая таблица показывает, какие знаки имеют координаты точки в различных координатных углах:

Координатные углы Координаты	I	II	III	IV
Абсцисса	+	−	−	+
Ордината	+	+	−	−

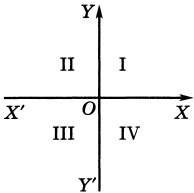


Рис. 6

На рис. 5 точка A_1 лежит в первом координатном углу, точка A_2 — во втором, точка A_4 — в третьем и точка A_3 — в четвертом.

Если точка лежит на оси абсцисс (например, точка B_1 на рис. 5), то ее ордината y равна нулю. Если точка лежит на оси ординат (например, точка B_2 на рис. 5), то ее абсцисса равна нулю.

§ 6. Косоугольная система координат

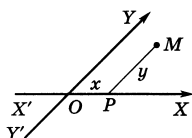


Рис. 7

Кроме прямоугольной системы координат, используются и другие системы. Косоугольная система (она наиболее сходна с прямоугольной) строится так: проводятся две неперпендикулярные прямые $X'X$ и $Y'Y$ (*оси координат*) (рис. 7) и далее поступают так же, как при построении прямоугольной системы (§ 3). Координаты $x = OP$ (*абсцисса*) и $y = PM$ (*ордината*) определяются так же, как объяснено в § 4.

Прямоугольная и косоугольная системы объединяются под названием *декартовой системы координат*.

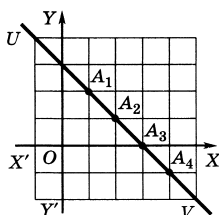
Наряду с декартовой применяются и другие системы координат (наиболее используемая *полярная система*; см. § 73).

§ 7. Уравнение линии

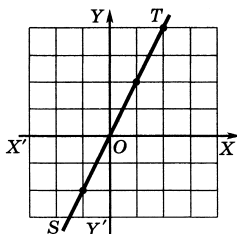
Рассмотрим уравнение $x + y = 3$, связывающее абсциссу x и ординату y . Ему удовлетворяет множество пар значений x, y , например, $x = 1$ и $y = 2$, $x = 2$ и $y = 1$, $x = 3$ и $y = 0$, $x = 4$ и $y = -1$ и т. д. Каждой паре координат (в данной системе координат) соответствует одна точка (§ 4). На рис. 8 а изображены точки $A_1(1; 2)$, $A_2(2; 1)$, $A_3(3; 0)$, $A_4(4; -1)$. Они лежат на одной прямой UV . На этой же прямой лежит всякая другая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению $x + y = 3$. Обратно, у любой точки, лежащей на прямой UV , координаты x, y удовлетворяют уравнению $x + y = 3$.

Согласно с этим говорят: *уравнение $x + y = 3$ есть уравнение прямой линии UV* . Говорят также: *уравнение $x + y = 3$ представляет прямую UV* . В аналогичном смысле надо понимать выражения: «уравнение прямой линии ST (рис. 8 б) есть $y = 2x$ ».

Уравнение $x^2 + y^2 = 49$ представляет окружность (рис. 9), радиус которой содержит 7 масштабных единиц, а центр совмещается с началом координат (см. § 38).



а)



б)

Рис. 8

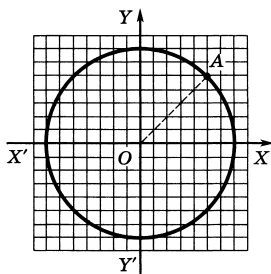


Рис. 9

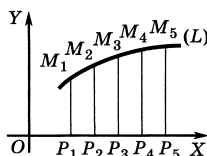


Рис. 10

Вообще уравнение, связывающее координаты x, y , называется уравнением линии L , если соблюдены два условия: 1) координаты x, y всякой точки M линии L удовлетворяют этому уравнению; 2) координаты x, y всякой точки, не лежащей на линии L , не удовлетворяют этому уравнению.

Координаты точки M , взятой на линии L произвольным образом, называют *текущими координатами*, так как линия L может быть образована перемещением («течением») точки M .

Пусть $M_1, M_2, M_3, \dots$ (рис. 10) — последовательные положения точки M на линии L . Построим ряд перпендикуляров $M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, \dots$ к оси OX . Получим идущие друг за другом отрезки $P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, \dots$. На оси OX отсекаются при этом отрезки $OP_1, OP_2, OP_3, \dots$. Они будут абсциссами. С этим связано происхождение терминов «абсцисса» и «ордината». Латинское слово «абсцисса» (abscissa) в переводе означает «отсеченная»; слово «ордината» есть сокращение термина «ординатим дукта» (ordinatim ducta), что означает «попоряд проведенная».

Представляя каждую точку плоскости ее координатами, а каждую линию — уравнением, связывающим текущие координаты, мы сводим геометрическую задачу к «аналитической» (т. е. вычислительной). Отсюда название «*аналитическая геометрия*».

§ 8. Взаимное расположение линии и точки

Чтобы ответить на вопрос, лежит ли точка M на некоторой линии L , достаточно знать координаты точки M и уравнение линии L . Если координаты точки M удовлетворяют уравнению линии L , то M лежит на L ; в противном случае не лежит.

Пример. Лежит ли точка $M(5; 5)$ на окружности $x^2 + y^2 = 49$ (§ 7)?

Решение. Подставим значения $x = 5, y = 5$ в уравнение $x^2 + y^2 = 49$. Так как уравнение не удовлетворяется, то точка M не лежит на рассматриваемой окружности.

§ 9. Взаимное расположение двух линий

Чтобы ответить на вопрос, есть ли у двух линий общие точки и если да, то сколько, достаточно знать уравнения этих линий. Если уравнения совместны, то общие точки есть, в противном случае их нет. Число общих точек равно числу решений системы уравнений.

Пример 1. Прямая линия $x + y = 3$ (§ 7) и окружность $x^2 + y^2 = 49$ имеют две общие точки, так как система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$

имеет два решения:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6,22, \quad y_1 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3,22$$

и

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3,22, \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6,22.$$

Пример 2. Прямая линия $x + y = 3$ и окружность $x^2 + y^2 = 4$ не имеют общих точек, так как система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

не имеет решений (действительных).

§ 10. Расстояние между двумя точками

Расстояние d между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Пример. Расстояние между точками $M(-2,3; 4,0)$ и $N(8,5; 0,7)$ составляет

$$d = \sqrt{(8,5 + 2,3)^2 + (0,7 - 4)^2} = \sqrt{10,8^2 + 3,3^2} \approx 11,3$$

(масштабных единиц).

Замечание 1. Порядок точек M и N не играет роли; можно N считать первой, а M — второй.

Замечание 2. Расстояние d считается положительным; поэтому в формуле (1) корень берется с одним знаком (плюс).

§ 11. Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ (рис. 11). Требуется найти координаты x , y точки K , делящей отрезок A_1A_2 , в отношении

$$A_1K : KA_2 = m_1 : m_2.$$

Решение дается формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}, \\ y &= \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

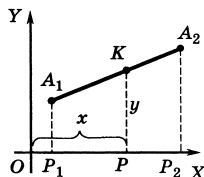


Рис. 11

Если отношение $m_1 : m_2$ обозначить буквой λ , то формулы (1) примут несимметричный вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

Пример 1. Даны точка $B(6; -4)$ и точка O , совпадающая с началом координат. Найти точку K , делящую BO в отношении $2 : 3$.

Решение. В формулы (1) надо подставить:

$$m_1 = 2, m_2 = 3, x_1 = 6, y_1 = -4, x_2 = 0, y_2 = 0.$$

Получаем:

$$x = \frac{18}{5} = 3,6, \quad y = -\frac{12}{5} = -2,4.$$

Это — координаты искомой точки K .

Замечание 1. Выражение «точка K делит отрезок A_1A_2 в отношении $m_1 : m_2$ » означает, что отношение $m_1 : m_2$ равно отношению отрезков $A_1K : KA_2$, взятых *именно в этом* (а не в обратном) порядке. В примере 1 точка $K(3,6; -2,4)$ делит отрезок BO в отношении $2 : 3$, а отрезок OB — в отношении $3 : 2$.

Замечание 2. Пусть точка K делит отрезок A_1A_2 *внешним* образом, т. е. лежит на продолжении отрезка A_1A_2 , тогда формулы (1) и (2) сохранят силу, если величине $m_1 : m_2 = \lambda$ приписать отрицательный знак.

Пример 2. Даны точки $A_1(1; 2)$ и $A_2(3; 3)$. Найти на продолжении отрезка A_1A_2 точку, отстоящую от A_1 вдвое дальше, чем от A_2 .

Решение. Имеем $\lambda = m_1 : m_2 = -2$ (так что можно положить $m_1 = -2$, $m_2 = 1$ или $m_1 = 2$, $m_2 = -1$). По формулам (1) находим:

$$x = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 5, \quad y = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 4.$$