

ОГЭ

В ТАБЛИЦАХ

МАТЕМАТИКА

Т. А. КОЛЕСНИКОВА



Москва

[СОДЕРЖАНИЕ]

Введение	6
Числа и вычисления	7
Натуральные числа. Действия с натуральными числами	7
Арифметические действия	7
Порядок выполнения действий	9
Делитель. Признак делимости	9
НОД и НОК	10
Сравнение натуральных чисел	12
Округление. Правила округления, приближённые вычисления	13
Прикидка и оценка результата вычислений	15
Дроби. Действия с дробями	16
Виды дробей. Основное свойство дроби	16
Смешанные числа	17
Наименьший общий знаменатель	18
Сравнение обыкновенных дробей и смешанных чисел	19
Действия с обыкновенными дробями и смешанными числами	19
Десятичные дроби	21
Проценты	24
Пропорция	25
Целые и рациональные числа пропорции. Модуль числа	26
Иррациональные и действительные числа	27
Алгебраические выражения	31
Арифметический корень натуральной степени	31
Степени с целым и рациональным показателями	32
Буквенные выражения	32
Числовое значение буквенного выражения	33
Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения	33
Равенство буквенных выражений, тождество	33
Одночлены и многочлены	34
Алгебраические дроби	36
Иррациональные выражения	37
Координаты на прямой и плоскости	42
Координатная прямая	42
Декартовы координаты на плоскости	43
Уравнения и неравенства	47
Уравнения	47

Линейные уравнения	48
Квадратные уравнения	48
Рациональные уравнения	50
Системы уравнений с двумя неизвестными	50
Совокупности уравнений	51
Неравенства	58
Числовые неравенства	59
Числовые промежутки	60
Неравенства с одной переменной	60
Линейные неравенства	62
Метод интервалов	62
Квадратные неравенства	63
Рациональные неравенства	67
Системы неравенств с одной неизвестной	68
Совокупности неравенств	69
Решение текстовых задач	75
Арифметический способ	75
Алгебраический способ	76
Числовые последовательности	82
Последовательности, способы задания последовательностей	82
Арифметическая и геометрическая прогрессия	83
Формула сложных процентов	84
Функции	87
Функция, способы задания функции. График функции	87
Свойства функции	89
Основные элементарные функции	92
Геометрия	102
Основные геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин	102
Треугольники	107
Площадь треугольника	119
Четырёхугольники	127
Площадь четырёхугольника	134
Многоугольники	145
Правильные многоугольники	146
Окружность и круг	147
Подобие фигур	154
Векторы на плоскости	169
Координаты вектора	173

Вероятность и статистика	180
Описательная статистика	180
Таблицы распределения случайных величин	180
Графическое представление случайных величин	181
Числовые характеристики дискретных случайных величин	183
Вероятность	185
Случайные события	185
Действия над событиями	186
Различные подходы к определению вероятности события	187
Основные теоремы о вероятностях	187
Комбинаторика	188
Множества	191
Основные понятия	191
Диаграммы Эйлера — Венна. Отношения на множествах	192
Операции над множествами	194
Графы	196
Основные понятия	196
Дерево случайного эксперимента (опыта)	197
Приложение	206
Практико-ориентированные задачи	206
Сюжет «Листы бумаги»	207
Сюжет «Тарифы»	212
Сюжет «Участок»	218
Сюжет «Квартира»	224
Сюжет «Деревни»	230
Сюжет «Населённые пункты»	236
Сюжет «Печь для бани»	242
Сюжет «Шины»	247
Справочные материалы	251

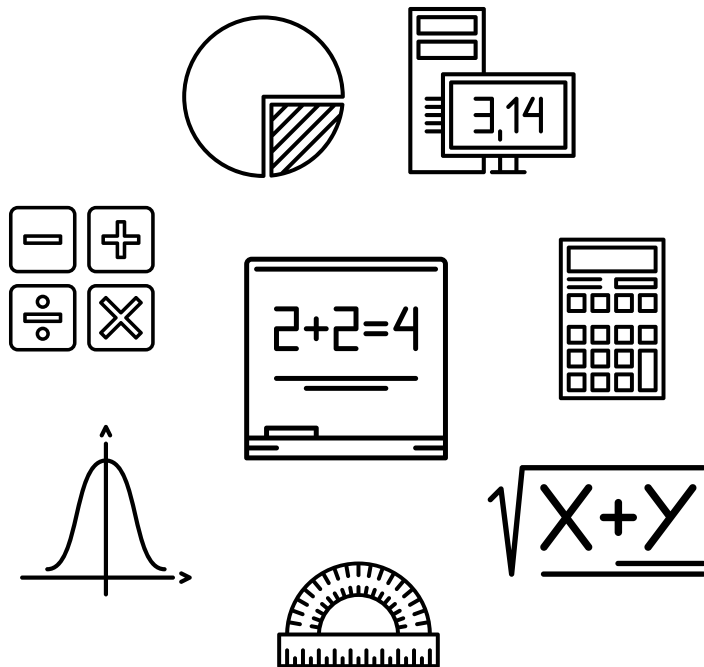
ВВЕДЕНИЕ

Перед вами справочник, который поможет обобщить, систематизировать и закрепить знания по математике за курс основной школы.

Пособие включает разделы «Числа и вычисления», «Алгебраические выражения», «Координаты на прямой и плоскости», «Уравнения и неравенства», «Числовые последовательности», «Функции», «Геометрия», «Вероятность и статистика». Темы, представленные в пособии, включены в Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования и Федеральную рабочую программу по математике, то есть присутствуют в содержании государственного (итогового) контроля.

Учебный материал изложен в виде таблиц с примерами и схемами по основным разделам школьного курса математики. Это позволит выделить главное, будет способствовать лучшему усвоению знаний, их закреплению и систематизации, а также поможет качественно подготовиться к ОГЭ в условиях дефицита времени.

Книга будет полезна школьникам, учителям и всем, кто интересуется математикой.



[ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ]

Натуральные числа. Действия с натуральными числами

Натуральными называются числа, которые используются при счёте предметов.

Числа 1, 10, 100, 1000 и т. д. называются **разрядными единицами**. Так, 1 — это единица разряда единиц, 10 — единица разряда десятков, 100 — единица разряда сотен и т. д.

👉 Арифметические действия

Арифметические действия	Свойства
Сложение	
$a + b = c$ $\nearrow$ слагаемые $\nwarrow$ сумма	$a + b = b + a$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a + 0 = a$
Вычитание (действие, обратное сложению)	
$a - b = c$ $\nearrow$ уменьшаемое $\nwarrow$ вычитаемое $\nwarrow$ разность	$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$ $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$ $a - (b - c) = (a - b) + c$ $a - 0 = a$ $a - a = 0$
Умножение	
$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b$ $b \text{ слагаемых}$ $a \cdot b = c$ $\nearrow$ множители $\nwarrow$ произведение Вариант обозначения: $a \times b$	$a \cdot b = b \cdot a$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ $a \cdot 1 = a$ $a \cdot 0 = 0$

Арифметические действия	Свойства
Деление (действие, обратное умножению)	
$a : b = c$ ↑ делимое ↑ делитель ↑ частное Варианты обозначений: $\frac{a}{b}$ или a/b. Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b. Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b. Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r, что $a = b \cdot q + r$ и $r < b$. ВАЖНО! Остаток должен быть меньше делителя. $a : b = q \text{ (ост. } r)$ ↑ делимое ↑ неполное частное ↑ делитель ↑ остаток	$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$ $a : (b : c) = (a : b) \cdot c$ $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$ $(a : b) : c = a : (b \cdot c)$ $a : a = 1$ $a : 1 = a$ $0 : a = 0 \ (a \neq 0)$ На нуль делить нельзя! ✓ Деление с остатком: $\begin{array}{r} \text{делимое} \nearrow \quad \quad \quad \nearrow \text{делитель} \\ 70 \overline{) 23} \\ \underline{6} \\ -10 \\ \underline{9} \\ 1 \\ \text{остаток} \nearrow \end{array}$ ↑ неполное частное Проверка: $70 = 3 \cdot 23 + 1$

Действие	Свойства
Возведение в степень с натуральным показателем	
Выражение a^n называется степенью числа a. Вторая степень числа называется квадратом числа, третья степень — кубом числа. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ ↑ показатель степени ↑ основание степени	$a^1 = a$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

Порядок выполнения действий

Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.
 Действия 2-й ступени: умножение и деление.
 Действия 3-й ступени: возведение в степень.

Порядок выполнения действий	Пример
В выражении без скобок сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо. Возведение в степень $\Rightarrow$ умножение/деление $\Rightarrow$ сложение/вычитание	Запись решения в строку: $\begin{array}{ccccccc} \textcircled{4} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{3} & \\ 17 - 5 \cdot 6 : 3 - 2 + 4 : 2 & = & 17 - 30 : 3 - \\ - 2 + 2 & = & 17 - 10 - 2 + 2 = 7 - 2 + 2 = 7 \end{array}$
В выражении со скобками сначала выполняют все действия в скобках, а затем — действия большей ступени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий. Действия в скобках $\Rightarrow$ возведение в степень $\Rightarrow$ умножение/деление $\Rightarrow$ сложение/вычитание	Запись решения по действиям: $\begin{array}{ccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{5} & \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{6} & \\ (3 + 1) \cdot 2 + 6^2 : 3 - 7 & = & 13 \end{array}$ 1) $3 + 1 = 4$; 2) $6^2 = 36$; 3) $4 \cdot 2 = 8$; 4) $36 : 3 = 12$; 5) $8 + 12 = 20$; 6) $20 - 7 = 13$

Делитель. Признак делимости

Делитель натурального числа	Кратное натуральному числу
Делителем натурального числа n называется такое натуральное число k, на которое число n делится без остатка. Обозначение: $n : k$ (читается «n делится на k»)	Натуральное число n называется кратным натуральному числу k, если число n делится на число k без остатка. Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных. ПРИМЕЧАНИЕ. Слово «кратно» можно заменить словами «делится на...»

Простое число	Составное число
Простым называется натуральное число, которое делится только на 1 и на само себя	Натуральное число, имеющее более двух делителей, называется составным. Любое составное число можно разложить на два множителя, каждый из которых больше 1

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Признак делимости — правило, позволяющее без выполнения деления определить, является ли число кратным заранее заданному числу.

Краткая формулировка признака делимости

На 2	Последняя цифра в записи числа — 0, 2, 4, 6 или 8
На 3	Сумма цифр числа делится на 3
На 4	Число оканчивается двумя нулями или число, образованное двумя последними цифрами, делится на 4
На 5	Последняя цифра в записи числа — 0 или 5
На 7	Разность между числом с отброшенной последней цифрой и удвоенной этой цифрой делится на 7
На 8	Число оканчивается тремя нулями или число, образованное тремя последними цифрами, делится на 8
На 9	Сумма цифр числа делится на 9
На 10	Последняя цифра в записи числа — 0
На 11	Сумма цифр на нечётных местах равна сумме цифр на чётных местах, либо разность этих сумм делится на 11
На 25	Число оканчивается на 00, 25, 50 или 75



НОД и НОК

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b , называется **наибольшим общим делителем** этих чисел. Аналогично определяется наибольший общий делитель для трёх и более натуральных чисел.

Краткая запись

Наибольший общий делитель — **НОД(a ; b)**

Алгоритм нахождения НОД		Пример
1	Разложить числа на простые множители	Найдём наибольший общий делитель чисел 60, 80 и 48. $60 = 2 \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot 5;$ $80 = 2 \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5; \quad 48 = 2 \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3;$ $\text{НОД}(60; 80; 48) = 2 \cdot 2 = 4$
2	Из множителей подчеркнуть те, которые входят в разложение всех чисел	
3	Найти произведение подчёркнутых множителей	

Если все данные числа делятся на одно из них, то это число является наибольшим общим делителем данных чисел.

✓ $\text{НОД}(15; 30) = 15$, так как $30 : 15$.

Натуральные числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

✓ Числа 15 и 17 — взаимно простые, так как $\text{НОД}(15; 17) = 1$.

Наименьшим общим кратным чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое кратно и a , и b . Аналогично определяется наименьшее общее кратное для трёх и более натуральных чисел.

Краткая запись

Наименьшее общее кратное — **НОК(a ; b)**

Алгоритм нахождения НОК		Пример
1	Разложить числа на простые множители	Найдём наименьшее общее кратное чисел 60, 80 и 48. $60 = 2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5};$ $80 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 5;$ $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{2} \cdot 3;$ $\text{НОК}(60; 80; 48) = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 2 = 240$
2	Выписать множители, входящие в разложение одного из чисел	
3	Дописать к ним недостающие множители из разложения других чисел	
4	Найти произведение получившихся множителей	

Если одно из данных чисел делится на все остальные числа, то это число является наименьшим общим кратным данных чисел.

✓ НОК(15; 30) = 30, так как $30 : 15$.

В некоторых случаях возможно найти НОК, перебирая кратные большего числа.

✓ Для нахождения НОК(12; 20) из кратных числа 20 выберем то, которое делится и на 12. Кратные 20: 20, 40, 60. Подходит число 60.



Сравнение натуральных чисел

Натуральный ряд является **упорядоченным множеством**, то есть для любых двух натуральных чисел m и n справедливо одно из соотношений: $m = n$ (m равно n), $m > n$ (m больше n), $m < n$ (m меньше n).

Правила сравнения натуральных чисел	Пример
С разным количеством цифр	
Из двух натуральных чисел с разным количеством цифр больше то число, у которого цифр больше	621 — 3 цифры, 75 — 2 цифры; $621 > 75$
С одинаковым количеством цифр	
Из двух натуральных чисел с одинаковым количеством цифр больше то, у которого больше единиц в наивысшем одноимённом разряде (сравнение проводится поразрядно, начиная со старшего разряда)	$18\ 756\ 028 > 18\ 754\ 994$, так как $6 > 4$

Если нужно сравнить сразу три числа, используют двойное неравенство. Например, $9 < 12 < 17$ читается с середины: «12 больше 9, но меньше 17».

Округление. Правила округления, приближённые вычисления

Округление — замена числа на его приближённое значение (с определённой точностью), записанное с меньшим количеством значащих цифр.

Правила округления натуральных чисел		Примеры
1	Найти разряд, до которого необходимо округлить	Округлить до десятков: $208\overline{)4} \approx 2080$.
2	Сравнить цифру, стоящую справа от этого разряда, с числом 5: • если эта цифра меньше 5 (0, 1, 2, 3, 4), то цифра разряда, до которого идёт округление, не меняется, а остальные цифры заменяются нулями; • если эта цифра больше или равна 5 (5, 6, 7, 8, 9), то цифра разряда, до которого идёт округление, увеличивается на 1, а остальные цифры заменяются нулями	Округлить до сотен: $64\overline{)51} \approx 6500$. Округлить до тысяч: $139\overline{)802} \approx 140\ 000$. Округлить до десятков тысяч: $28\overline{)3927} \approx 280\ 000$

Правила округления десятичных дробей		Примеры
1	Найти цифру округляемого разряда	Округлить до десятых: $37,4\overline{)49} \approx 37,4$.
2	Отделить вертикальной чертой все цифры, стоящие справа от округляемого разряда	Округлить до сотых: $0,64\overline{)51} \approx 0,65$.
3	• Если первая отбрасываемая цифра — 0, 1, 2, 3 или 4, то последняя оставшаяся цифра записывается без изменений, а все цифры после вертикальной черты отбрасываются. • Если первая отбрасываемая цифра — 5, 6, 7, 8 или 9, то к последней оставшейся цифре надо добавить 1, а все цифры после вертикальной черты отбросить	Округлить до единиц (до целых): $957\overline{)802} \approx 958$
Если при округлении десятичной дроби последняя из оставшихся цифр в дробной части — 0, то отбрасывать этот ноль нельзя. В таком случае ноль в дробной части показывает, до какого разряда округлено число		Округлить до тысячных: $2,849\overline{)613} \approx 2,850$

Правила округления десятичных дробей	Примеры
Если десятичную дробь нужно округлить до разряда выше единиц (десятков, сотен и т. д.), то дробная часть отбрасывается, а целая часть округляется по правилам округления натуральных чисел	Округлить до десятков: $96 \mid \underline{3,806} \approx 960$. Округлить до сотен: $54 \mid \underline{71,83} \approx 5500$

Десятичную дробь можно округлить: • до определённого разряда дробной части: десятых, сотых, тысячных, десятитысячных и т. д.; • до целого числа с точностью до единиц, десятков, сотен и т. д.
--

При решении задач возможны три ситуации, связанные с округлением:

- математическое округление;
- округление с недостатком;
- округление с избытком.

Округление с недостатком	Округление с избытком
Если в задаче идёт речь о штучных единицах (карандаши, тетради, тарелки, люди и т. д.), то округление производят с недостатком , то есть ответ надо округлить до ближайшего наименьшего целого, отбросив дробную часть	Если в задаче идёт речь о предметах, которые включают в себя другие предметы или элементы (автобус с пассажирами, этажи дома, упаковки с чем-либо и т. п.), то округлять нужно с избытком до ближайшего наибольшего целого. Следует отбросить дробную часть результата и к целой части добавить единицу

Приближённые вычисления — это математические операции, в которых используются приближённые значения чисел вместо точных. Это позволяет:

- упростить расчёты, сэкономить время;
- найти результат с достаточной степенью точности для решения конкретной задачи.



Прикидка и оценка результата вычислений

Прикидка и оценка результата вычислений — это процесс получения приближённого значения числового выражения или результата вычисления с использованием приблизительных значений.

Алгоритм прикидки арифметических действий		Пример
1	Заменить все компоненты действия (числа) удобными для вычислений в уме близкими по значению круглыми числами	При делении 186 062 на 31 был получен результат 602. Является ли он достоверным? Сделаем прикидку: $186\,062 : 31 \approx 180\,000 : 30 = 6000$. Значит, результат не является достоверным
2	Записать получившееся выражение с помощью специального знака « $\approx$ »	
3	Выполнить необходимое действие (сложение, вычитание, умножение или деление). Результат записать, поставив знак « $\approx$ »	
4	Проанализировать полученный результат и применить его в задании	

Назначение прикидки	Примеры использования прикидки и оценки
Чтобы исключить потерю нулей в середине числа при делении, полезно делать прикидку результата вычисления. Прикидка также помогает исключить неверную постановку запятой при умножении и делении десятичных дробей	Проверка правдоподобности результатов. Если при расчёте получен результат, сильно отличающийся от прикидочного, это может указывать на ошибку в вычислениях
	Упрощение сложных выражений. При решении задач оценивают результат промежуточных вычислений для облегчения последующих шагов
	Быстрая оценка в реальных ситуациях. Позволяет принимать решения без точных вычислений, например оценить общую стоимость покупок

Оценка результата — определение нижней и верхней границ, между которыми находится точное значение выражения. Для этого каждое число заменяют двумя приближениями: с недостатком (меньшее число) и с избытком (большее число).

Дроби. Действия с дробями

Дробь — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

Число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное, называют **обыкновенной дробью**.

$\frac{m}{n}$ ← числитель
 n ← знаменатель

👉 Виды дробей. Основное свойство дроби

Виды обыкновенных дробей	
Правильная дробь	Неправильная дробь
Правильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, то есть $m < n$. Любая правильная дробь меньше единицы: $\frac{m}{n} < 1$, если $m < n$	Неправильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, то есть $m \geq n$. Любая неправильная дробь больше единицы или равна ей: $\frac{m}{n} \geq 1$, если $m \geq n$

Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби.

Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad c \neq 0$$

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

ВАЖНО! При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным