

ЕГЭ В ТАБЛИЦАХ

МАТЕМАТИКА

Т. А. КОЛЕСНИКОВА



Москва

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	6
ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ	7
—○ Натуральные числа	7
Признаки делимости чисел	8
Наибольший общий делитель	10
Наименьшее общее кратное	11
—○ Целые числа	12
—○ Рациональные числа	13
Обыкновенные дроби и смешанные числа	13
Десятичные дроби	16
—○ Проценты	19
—○ Арифметический квадратный корень	21
—○ Арифметический корень натуральной степени	24
—○ Степень с целым показателем	26
—○ Степень с рациональным показателем	28
—○ Иррациональные числа	29
—○ Действительные числа	30
Арифметические операции с действительными числами	30
Правила округления, приближённые вычисления	31
Прикидка и оценка результата вычислений	34
—○ Степень с действительным показателем	35
—○ Логарифм числа	36
Представление числа в виде логарифма по определённому основанию	37
—○ Синус, косинус, тангенс угла числового аргумента	39
Градусная и радианная мера угла	39
Синус, косинус, тангенс и котангенс угла	40
Основные тригонометрические формулы	43
—○ Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа	46
—○ Преобразование выражений	47
Тождественные преобразования	47
Одночлены и многочлены	48
Алгебраические дроби	51
Иррациональные выражения	54
Логарифмические выражения	56
Тригонометрические выражения	57
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	59
—○ Уравнения	59

Целые и дробно-рациональные уравнения	60
Иррациональные уравнения	66
Показательные уравнения	68
Логарифмические уравнения	70
Тригонометрические уравнения	73
Уравнения смешанного вида	78
—о Неравенства	80
Целые и дробно-рациональные неравенства	82
Иррациональные неравенства	93
Показательные неравенства	94
Логарифмические неравенства	98
Тригонометрические неравенства	103
—о Системы и совокупности уравнений и неравенств	106
Системы уравнений с двумя неизвестными	106
Системы неравенств с одной неизвестной	107
Совокупности уравнений и неравенств	108
—о Уравнения, неравенства и системы с параметрами	109
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ	113
—о Функция, способы задания функции. График функции	113
—о Свойства функции	115
—о Взаимно обратные функции	124
—о Основные элементарные функции	125
—о Степенная функция с натуральным и целым показателем, её свойства и график	132
—о Свойства и график корня n -й степени	133
—о Тригонометрические функции, их свойства и графики	135
—о Показательная функция, её свойства и график	137
—о Логарифмическая функция, её свойства и график	139
—о Последовательности, способы задания последовательностей	141
—о Арифметическая и геометрическая прогрессия	142
—о Формула сложных процентов	143
НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	145
—о Производная функции. Производные элементарных функций	145
Геометрический смысл производной	147
Физический смысл производной	152
Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы	153
Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке с помощью производной	158

—○ Первообразная и неопределённый интеграл.....	168
—○ Определённый интеграл	171
Вычисление площадей с помощью определённого интеграла	173
МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА	177
—○ Понятие множества.....	177
—○ Диаграммы Эйлера — Венна. Отношения на множествах.....	179
—○ Операции над множествами	180
Свойства пересечения и объединения множеств	183
—○ Логика.....	186
Высказывания.....	186
Логические операции.....	188
Предложения с переменными.....	190
ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА.....	191
—○ Описательная статистика.....	191
Таблицы распределения случайных величин.....	191
Графическое представление случайных величин.....	192
Числовые характеристики дискретных случайных величин.....	194
—○ Комбинаторика	196
—○ Вероятность.....	199
Случайные события	199
Действия над событиями.....	200
Различные подходы к определению вероятности события	200
Основные теоремы о вероятностях	203
Решение задач с помощью координатной прямой	207
Дерево случайного эксперимента (опыта)	208
ГЕОМЕТРИЯ	213
—○ Планиметрия.....	213
Начальные геометрические сведения.....	213
Треугольники	219
Четырёхугольники	230
Многоугольники.....	236
Окружность и круг.....	237
Площади фигур.....	243
Правильные многоугольники	247
Векторы. Действия над векторами	250
Метод координат	254
—○ Стереометрия	258
Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	258
Многогранники.....	267
Тела вращения.....	274
Векторы в пространстве. Метод координат в пространстве.....	282

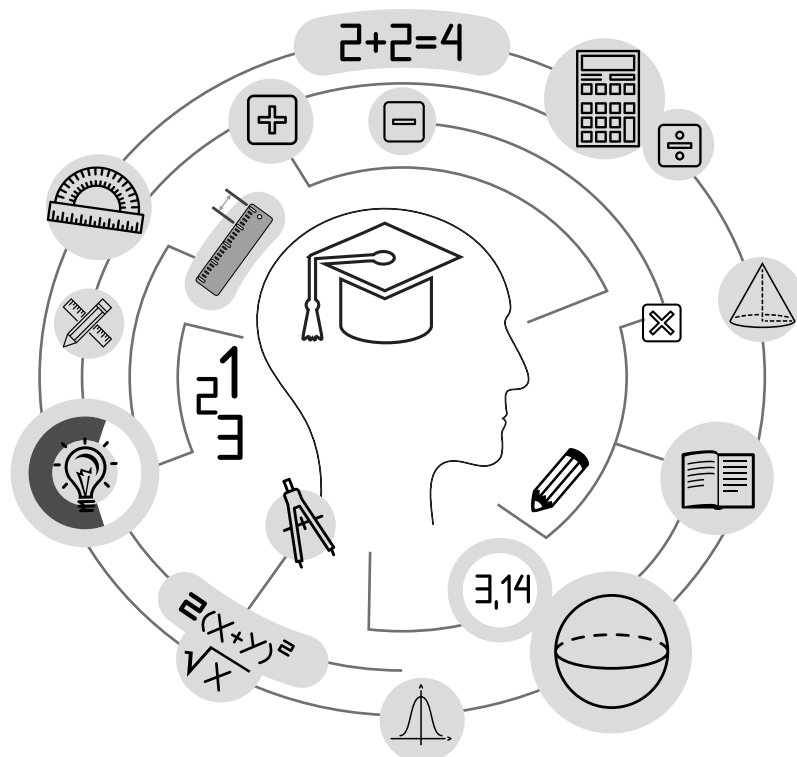
Введение

Перед вами справочник, который поможет обобщить, систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Пособие включает разделы «Числа и вычисления», «Уравнения и неравенства», «Функции и графики», «Начала математического анализа», «Множества и логика», «Вероятность и статистика», «Геометрия». Темы, представленные в пособии, соответствуют Федеральным государственным образовательным стандартам основного общего и среднего общего образования и включены в Федеральную образовательную программу по математике, то есть присутствуют в содержании государственного (итогового) контроля.

Учебный материал изложен в виде таблиц с примерами, рисунками и схемами по основным разделам школьного курса математики. Это позволит выделить главное, будет способствовать систематизации и закреплению знаний, лучшему усвоению и запоминанию, а также поможет качественно подготовиться к ЕГЭ в условиях дефицита времени.

Книга будет полезна школьникам, учителям и всем, кто интересуется математикой.



Числа и вычисления

Натуральные числа

Название числового множества	Определение и обозначение
Натуральные числа	Числа, которые используются при счёте предметов. $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10...\}$
Целые числа	Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (-1; -2; -3; -4; -5...), и число ноль образуют множество целых чисел. $Z = \{...-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3...\}$

Действия, которые определены на множестве целых чисел

Действия 1-й ступени	Сложение и вычитание
Действия 2-й ступени	Умножение и деление
Действия 3-й ступени	Возведение в натуральную степень

Порядок выполнения действий	Пример
В выражении без скобок сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо. Возведение в степень $\Rightarrow$ умножение/деление $\Rightarrow$ сложение/вычитание	Запись решения в строчку: $\begin{aligned} & \textcircled{4} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{5} \textcircled{6} \textcircled{3} \\ & 17 - 5 \cdot 6 : 3 - 2 + 4 : 2 = 17 - 30 : 3 - \\ & - 2 + 2 = 17 - 10 - 2 + 2 = 7 - 2 + 2 = 7 \end{aligned}$
В выражении со скобками сначала выполняют все действия в скобках, а затем действия большей ступени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий. Действия в скобках $\Rightarrow$ возведение в степень $\Rightarrow$ умножение/деление $\Rightarrow$ сложение/вычитание	Запись решения по действиям: $\begin{aligned} & \textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{5} \textcircled{2} \textcircled{4} \textcircled{6} \\ & (3+1) \cdot 2 + 6^2 : 3 - 7 = 13 \end{aligned}$ 1) $3+1=4$; 4) $36:3=12$; 2) $6^2=36$; 5) $8+12=20$; 3) $4 \cdot 2=8$; 6) $20-7=13$

• — Признаки делимости чисел

Делителем натурального числа n называется такое натуральное число k , на которое число n делится без остатка. Обозначение: $n:k$ (читается « n делится на k »).

Простое число	Составное число
Простым называется натуральное число, которое делится на 1 и на само себя	Натуральное число, имеющее более двух делителей, называется составным . Любое составное число можно разложить на два множителя, каждый из которых больше 1

.....
: Число 1 не является ни простым, ни составным. :
.....

Признак делимости — правило, позволяющее без выполнения деления определить, является ли число кратным заранее заданному числу.

Краткая формулировка признака делимости	
На 2	Последняя цифра в записи числа — 0, 2, 4, 6 или 8
На 3	Сумма цифр числа делится на 3
На 4	Число оканчивается двумя нулями или число, образованное двумя последними цифрами, делится на 4
На 5	Последняя цифра в записи числа — 0 или 5
На 7	Разность между числом с отброшенной последней цифрой и удвоенной этой цифрой делится на 7
На 8	Число оканчивается тремя нулями или число, образованное тремя последними цифрами, делится на 8
На 9	Сумма цифр числа делится на 9
На 10	Последняя цифра в записи числа — 0

Краткая формулировка признака делимости

На 11	Сумма цифр на нечётных местах равна сумме цифр на чётных местах, либо разность этих сумм делится на 11
На 25	Число оканчивается на 00, 25, 50 или 75



Типовое задание

Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

Решение

Число, которое делится на 27, должно делиться на 9. По признаку делимости сумма цифр этого числа делится на 9. Заметим, что делимость на 9 не гарантирует делимость на 27, поэтому потребуется проверка.

Сумма цифр числа 123456 равна $1+2+3+4+5+6=21$. Чтобы сумма цифр получившегося числа была равна 9, вычеркнем цифры, дающие в сумме 3 или 12.

Для получения суммы цифр, равной 3, можно вычеркнуть только 1 и 2. Но по условию необходимо вычеркнуть три цифры. Рассмотрим сумму цифр, равную 12. Для этого нужно вычеркнуть 1, 5 и 6 или 2, 4 и 6. Если вычеркнуть 1, 5 и 6, то получим число 234. Проверка показывает, что оно не делится на 27. Тогда вычеркнем 2, 4 и 6, получим 135. Проверка: $135:27=5$.

Ответ: 135.

Свойства делимости	Примеры
Если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число	$(132 \cdot 97):11$, так как $132:11$
Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число	$(918+678):3$, так как $918:3$ и $678:3$
Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность делится на это число	$(264-108):4$, так как $264:4$ и $108:4$
Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то первое число делится на третье	$204:12$, $12:6$, значит, $204:6$
Если число одновременно делится на несколько взаимно простых чисел, то оно делится и на произведение этих чисел	$954:2$, $954:3$, 2 и 3 — взаимно простые числа, значит, $954:6$

• — Наибольший общий делитель

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b , называется **наибольшим общим делителем** этих чисел. Аналогично определяется наибольший общий делитель для трёх и более натуральных чисел.

Краткая запись

Наибольший общий делитель — **НОД(a ; b)**

Алгоритм нахождения НОД		Пример
1	Разложить числа на простые множители	Найдём наибольший общий делитель чисел 60, 80 и 48. $60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot 5$; $80 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $48 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $\text{НОД}(60; 80; 48) = 2 \cdot 2 = 4$
2	Из множителей подчеркнуть те, которые входят в разложение всех чисел	
3	Найти произведение подчёркнутых множителей	

Если все данные числа делятся на одно из них, то это число и является наибольшим общим делителем данных чисел.

✓ $\text{НОД}(15; 30) = 15$, так как $30 : 15$.

Натуральные числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

✓ Числа 15 и 17 — взаимно простые, так как $\text{НОД}(15; 17) = 1$.



Типовое задание

✓ По кругу в некотором порядке по одному разу написаны натуральные числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

- Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
- Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

ПОДСКАЗКА. Для доказательства возможности достаточно привести пример. Чтобы доказать невозможность, необходимо привести доказательные рассуждения.

Решение

а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 9, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 18, 17, 10.

б) Нет, не могло. Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них больше либо равен 10. Но это невозможно, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей равен: $\text{НОД}(18; 9) = 9$.

Ответ: а) да, б) нет.

✓ а) Существуют ли такие десять различных двузначных чисел, среди которых ровно 5 делятся на 2, ровно 5 делятся на 3, ровно 5 делятся на 5 и ровно 3 делятся на 6?

б) Существуют ли такие десять различных двузначных чисел, среди которых ровно 7 делятся на 3, ровно 7 делятся на 5, ровно 7 делятся на 7?

Решение

а) Да, например числа: 10, 12, 18, 20, 24, 27, 33, 35, 55, 65. Только 10, 12, 18, 20, 24 делятся на 2; 12, 18, 24, 27, 33 делятся на 3; 10, 20, 35, 55, 65 делятся на 5; 12, 18 и 24 делятся на 6.

б) Если среди десяти различных двузначных чисел ровно 7 делятся на 3 и ровно 7 делятся на 5, то среди них не менее четырёх, которые делятся на $3 \cdot 5 = 15$. Если, кроме того, среди этих десяти чисел есть ровно 7, которые делятся на 7, то среди них найдётся хотя бы одно число, которое делится на $15 \cdot 7 = 105$. Но такого двузначного числа не существует. Значит, десять чисел, соответствующих условию, не существуют.

Ответ: а) да, б) нет.

— Наименьшее общее кратное

Натуральное число n называется **кратным** натуральному числу k , если число n делится на k без остатка. Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных. Слово «кратно» можно заменить словами «делится на...».

Наименьшим общим кратным чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое кратно и a , и b . Аналогично определяется наименьшее общее кратное для трёх и более натуральных чисел.

Краткая запись	Наименьшее общее кратное — НОК(a; b)
-----------------------	---

Алгоритм нахождения НОК		Пример
1	Разложить числа на простые множители	Найдём наименьшее общее кратное чисел 60, 80 и 48. $60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5};$ $80 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 5;$ $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3;$ $\text{НОК}(60; 80; 48) = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 2 = 240$
2	Выписать множители, входящие в разложение одного из чисел	
3	Дописать к ним недостающие множители из разложения других чисел	
4	Найти произведение получившихся множителей	

.....

• Если одно из данных чисел делится на все остальные числа, то это число и является наименьшим общим кратным данных чисел.

• ✓ НОК(15; 30) = 30, так как $30 : 15$.

• В некоторых случаях возможно найти НОК, перебирая кратные большего числа.

• ✓ Для нахождения НОК(12; 20) из кратных числа 20 выберем то, которое делится и на 12. Кратные 20: 20, 40, 60. Подходит число 60.

.....

Целые числа

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

.....

• Геометрический смысл: модуль числа — это расстояние от начала отсчёта до данного числа.

.....

Арифметические действия с положительными и отрицательными числами	
Сложение	
Чтобы сложить два отрицательных числа , надо: 1) сложить их модули; 2) поставить перед полученным числом знак «—»	Чтобы сложить два числа с разными знаками , надо: 1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший; 2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше
Вычитание	
Чтобы из данного числа вычесть другое , надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому	
Умножение	Деление
Чтобы перемножить два числа с разными знаками , надо перемножить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «—»	Чтобы разделить два числа с разными знаками , надо разделить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «—»
Чтобы перемножить два отрицательных числа , надо перемножить их модули	Чтобы разделить два отрицательных числа , надо разделить их модули

Рациональные числа

Рациональные числа — числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, (конечные или бесконечные периодические десятичные дроби). Обозначение: $\mathbb{Q}$.

Обыкновенные дроби и смешанные числа

Дробь — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

Число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное, называют **обыкновенной дробью**.

$\frac{m}{n}$ ← числитель

n ← знаменатель

Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad c \neq 0$$

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

ВАЖНО! При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным

Число, содержащее целую и дробную части, называется **смешанным**.

Если у дробей разные знаменатели (числители), необходимо сначала с помощью основного свойства дроби привести их к одному знаменателю (числителю).

Сложение

Вычитание

Действия с обыкновенными дробями

Чтобы **сложить дроби**, надо:

- 1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные;
- 2) сложить числители полученных дробей, а знаменатель оставить

прежним: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить; если дробь неправильная, нужно представить её в виде смешанного числа

Чтобы **вычесть дроби**, надо:

- 1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные;
- 2) вычесть числители полученных дробей, а знаменатель оставить прежним:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить

Сложение	Вычитание
Действия со смешанными числами	
Чтобы сложить смешанные числа, надо: 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю; 2) отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно — дробных. Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, нужно выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части	Чтобы вычесть смешанные числа, надо: 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю; 2) отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно — дробных. Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, нужно превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть

Умножение	Деление
Действия с обыкновенными дробями	
Чтобы умножить дроби, надо: 1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей (привести сокращение, если возможно): $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$ 2) первое произведение записать в числителе, а второе — в знаменателе	Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
Действия со смешанными числами	
Чтобы выполнить умножение смешанных чисел, надо: 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей; 2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей; 3) первое произведение записать в числителе, а второе — в знаменателе	Чтобы выполнить деление смешанных чисел, надо: 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей; 2) делимое умножить на число, обратное делителю

.....

Чтобы выполнить умножение (деление) на натуральное число, его можно представить в виде неправильной дроби со знаменателем 1: $n = \frac{n}{1}$.

✓ $2 : 1\frac{3}{5} = 2 : \frac{8}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25$.

.....

При выполнении умножения и деления обыкновенных дробей и смешанных чисел полезно до умножения числителей и знаменателей проверять возможность сокращения. Это упростит расчёты и минимизирует возможность вычислительной ошибки.

— Десятичные дроби

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.

$$\text{целая часть} \rightarrow \underbrace{a, bcde}_{\text{дробная часть}} \dots = a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \frac{e}{10\,000} + \dots$$

i

Определение	Примеры
Конечные десятичные дроби	
Десятичные дроби, в записях которых содержится конечное число знаков	5,6; 2,84; 0,1087
Бесконечные десятичные дроби	
Периодические десятичные дроби (или просто периодические дроби) — это бесконечные десятичные дроби, в записи которых, начиная с некоторого знака после запятой, бесконечно повторяется какая-нибудь цифра или группа цифр, называемая периодом дроби	1,666... = 1,(6); 0,5313131... = 0,5(31)
Непериодические десятичные дроби (или просто непериодические дроби) — это бесконечные десятичные дроби, не имеющие периода	0,101001000100001...; 45,1234567891011...

Приведение десятичной дроби к обыкновенной
Если целая часть десятичной дроби равна нулю, то десятичную дробь записывают в виде обыкновенной. В числителе следует записать число, стоящее после запятой. В знаменателе записать разрядную единицу (10, 100, 1000 и т. д.), которая содержит столько же нулей, сколько знаков находится после запятой в десятичной дроби.