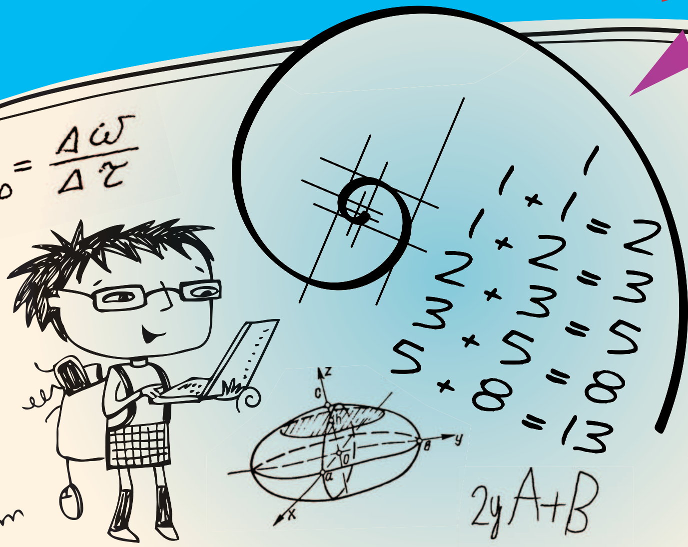
Антонио Грамши

С МАТЕМАТИКОЙ на «ты»!



Логические игры и задачи разных уровней сложности

Издательство АСТ
Москва

КЛАДЕЗЬ

УДК 51
ББК 22.1
Г76

Все права защищены.
Ни одна часть данного издания не может быть воспроизведена или использована в какой-либо форме, включая электронную, фотокопирование, магнитную запись или какие-либо иные способы хранения и воспроизведения информации, без предварительного письменного разрешения правообладателя.

Грамши, Антонио.
Г76 С математикой на «ты»! Логические игры и задачи разных уровней сложности. — Москва: Издательство АСТ, 2024. — 160 с.: ил. — (Загадки чисел. Головоломки для ума).

ISBN 978-5-17-165513-6

Вас ждет увлекательное путешествие в мир математики!

Эта книга содержит креативные задачи и упражнения, способные увлечь как школьников, так и их родителей.

Творческий подход к математике и игровые элементы позволят развивать гибкость мышления и стратегическую смекалку не только с пользой, но и с интересом. Логические игры и головоломки разных уровней сложности смогут привить любовь к математике с первой страницы.

Открывайте новые горизонты с каждой задачей!

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-17-165513-6

© Грамши, А., 2024.
© Оформление. ООО «Издательство АСТ», 2024

Предисловие

Не секрет, что в последнее время брешь, разделяющая школьную, зачастую рутинную математику и математику «для избранных» — кружково-олимпиадную, — достигла угрожающих размеров. Чем разнообразней и интересней становится последняя, тем скучнее первая. Это отражается в публикуемой литературе: с одной стороны — недоступные «простым смертным» пособия для физико-математических школ и кружков, с другой — море сборников однотипных технических задач.

Предлагаемые в этом сборнике задачи могут решаться как «обычными», так и мотивированными детьми. Секрет прост: одна и та же идея, пусть даже самая необычная и далекая от школьной тематики, иллюстрируется широким по уровню сложности спектром задач — от самых легких до сложных.

Ключевая цель — не натаскать, а привить ЛЮБОВЬ к математике. Именно на таких примерах дети должны понять, что ломать голову над какой-то задачкой — не скучное утомительное занятие, а соприкосновение с по-настоящему волшебным миром математики, которому, как знать, они захотят посвятить всю свою жизнь. Если же нет, тогда воспоминание о таких математических забавах заложит в них критическое мышление и уважение к точным наукам.

Разумеется, книга предназначена не только для школьников, но и для всех любителей занимательной математики. Автор надеется, что даже профессиональные математики найдут для себя много интересного.

Большинство задач и головоломок и даже некоторые логические игры можно назвать *креативными*. Это означает, что аналогичные задачи и игры читатели могут с легкостью придумать сами, что служит дополнительным стимулом для творческого освоения математики.

Ответы к задачам приводятся в конце каждой главы. Некоторые из них имеют исследовательский характер, то есть решений к ним не приводится (иногда решение неизвестно и самому автору!). Они, как и задачи, разбираемые по ходу изложения, выделены ***жирным курсивом***. Главы в книге в целом независимые, так что их можно читать в любой последовательности. В голубых и синих пунктирных рамках даны пояснения к рисункам, дополнительные второстепенные детали, а также разделы, которые при первом чтении можно пропустить — для их понимания требуется более основательная математическая подготовка.

Благодарности

Впервую очередь хочется выразить глубочайшую признательность преподавателю «Матйкласса» Людмиле Баваровой за всестороннюю поддержку в подготовке рукописи, помощь в составлении задач и новые яркие идеи, обогатившие содержание. Много интересных задач для сборника сочинила Алена Салангина, тоже преподаватель «Матйкласса».

Огромная благодарность самому «Матйклассу» — он сподвиг меня на написание первых книг по занимательной математике и предоставил великолепную возможность предложить описанные в них игры и головоломки детям самого разного возраста и уровня математической подготовки.

И низкий поклон моим самоотверженным родителям: экономя буквально на всем, они находили для меня прекрасных учителей математики, которые привили мне любовь к Царице наук.

Об авторе

Фотограф: Н. Чебан

Антонио Грамши (род. в 1965) — итальянско-российский изобретатель головоломок и логических игр, а также музыкант-мультиинструменталист.

Преподает нестандартную математику в онлайн-школе «Матйкласс» и лицее «Italo Calvino» при Посольстве Италии в Москве. Публиковался в журнале «Квант» и на портале «Популярная механика». Кроме этого, выпустил 23 книги по занимательной математике в издательстве «Матйкласса».

Антонио Грамши играет во многих ансамблях старинной и этнической музыки, пишет музыку для спектаклей.

Совместно с Григорием Амосовым, профессором матмеха Санкт-Петербургского университета и Математического института им. Стеклова, проводит исследования по связи ритмики с алгеброй.

Почта автора для связи и предложений по книге: **gramsci1965@gmail.com.**

Часть 1.

Головоломки

Первая часть посвящена геометрическим головоломкам на построение многоугольников и вообще замкнутых ломаных на квадратной решетке, иными словами, на листе бумаги в клетку — это все, что нужно для начального освоения геометрии.

☞ **Для практических занятий желательно использовать листы с увеличенными клетками из тетрадей для младшеклассников.**

Глава 1. Полигония

Название главы происходит от греческого слова πολύγωνο («*полигоно*»), означающего «многоугольник».

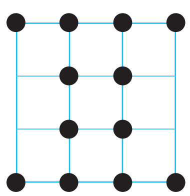
Во всех головоломках этого цикла нужно построить один или несколько многоугольников, вершинами которых являются заданные точки на квадратной решетке. При этом в некоторых задачах достаточно лишь привести пример многоугольника, не противоречащего правилам, а в других — еще и добиться того, чтобы построенная фигура обладала, например, как можно большей или как можно меньшей площадью, периметром и т. д.

Вообще говоря, когда подобная формулировка встречается в математической задаче, необходимо строго доказать, что найденное решение действительно оптимально и улучшить его невозможно. Однако для сложных конфигураций, встречающихся в головоломках, подобные доказательства сводятся к перебору различных вариантов и становятся громоздкими. Поэтому при решении головоломок акценты смещаются — важны не столько доказательства, сколько степень приближения к «идеальному» решению. Не исключено, что читатель сможет улучшить решения, приведенные автором.

Здесь приведены как классические задачи, хорошо известные в кружково-олимпиадной математике, так и авторские. Начнем с классики.

1. Построение многоугольника по заданным вершинам

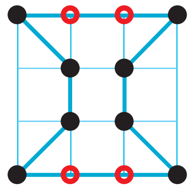
На квадратной решетке задается конечная конфигурация из узловых точек (то есть точек, расположенных в вершинах клеток), например, следующая:



Нужно построить многоугольник, вершинами которого являются все данные точки. Это означает, что **каждая** заданная точка должна быть одной из вершин искомого многоугольника.

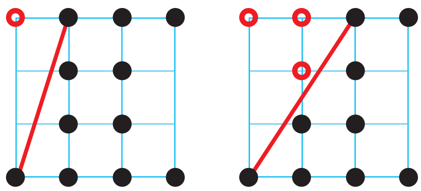
Под многоугольником мы понимаем замкнутую *несамопересекающуюся* ломаную (то есть не пересекающую саму себя), причем угол в каждой ее вершине не должен быть равным 180°, иными словами, направление ломаной меняется в каждой вершине.

Следующий многоугольник не будет решением, поскольку точки, отмеченные красным цветом, не являются его вершинами (в них ломаная не меняет направления):



Попробуем найти хотя бы одно решение для приведенной конфигурации, сочетая интуитивные соображения, метод проб и ошибок, а также разумное планирование и анализ.

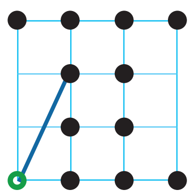
Для начала построим *пробный* отрезок — первую возможную сторону искомого многоугольника. Ясно, что такой отрезок не должен изолировать одну группу точек от другой:



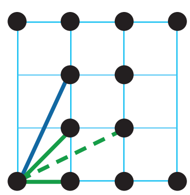
Здесь пробный отрезок в обоих случаях изолирует точки, выделенные красным, от остальных точек конфигурации. Поэтому он не может быть стороной искомого многоугольника.

В качестве пробного желательно выбрать как можно более длинный отрезок, который бы сильно ограничивал число возможностей для дальнейшего построения (это принцип *жадного алгоритма* — он упрощает поиск решения). Такой отрезок целесообразно строить от какой-нибудь угловой точки конфигурации, ближе к ее краю.

Для нашей конфигурации пробным отрезком может быть, например, такой:

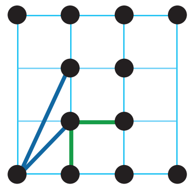


Теперь нам выгодно продолжить построение ломаной от точки, выделенной зеленым цветом: она располагается в углу конфигурации, и имеется всего 3 возможности продолжить от нее ломаную:



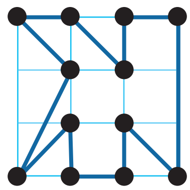
Отрезок, выделенный пунктиром, отметаем: несложно убедиться с помощью короткого перебора возможностей, что в случае выбора этого отрезка дальнейшее построение ломаной быстро заходит в тупик.

Диагональный отрезок предпочтительней, поскольку он порождает всего 2 возможности продолжить ломаную (соответствующие отрезки выделены на следующем рисунке зеленым цветом):



Но не будем забывать и об альтернативном варианте, к которому мы еще можем вернуться!

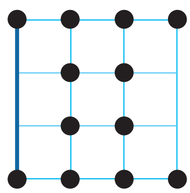
Продолжая действовать подобным образом, мы придем, например, к такому решению:



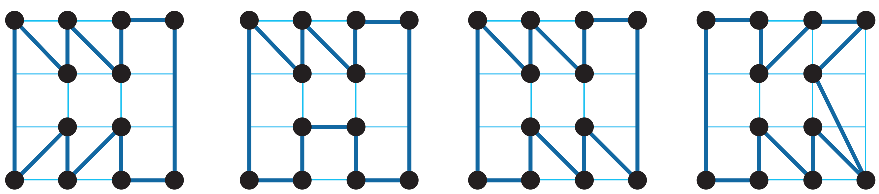
Следует отметить, что в процессе построения искомой ломаной целесообразно иногда переключаться с одного ее конца на другой. Если цепочка выбираемых отрезков (включая первый пробный) заводит в тупик, возвращаемся к оставленным нами альтернативным вариантам отрезков и исследуем их.

Но даже если решение найдено, все равно желательно исследовать альтернативные варианты, чтобы найти как можно больше решений.

Возьмем в качестве первого пробного другой отрезок:



Тогда мы придем к множеству других решений, некоторые из которых показаны на следующем рисунке:

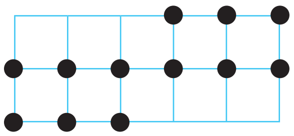


Задачи

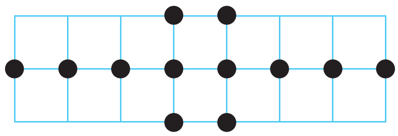
В приведенных задачах нужно найти какой-нибудь многоугольник (а желательно несколько), проходящий через все точки заданной конфигурации.

Решения приведены в конце главы (с. 32).

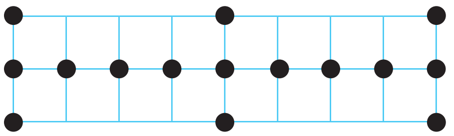
1



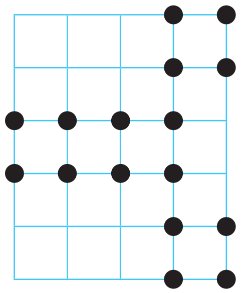
2



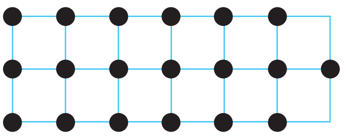
3



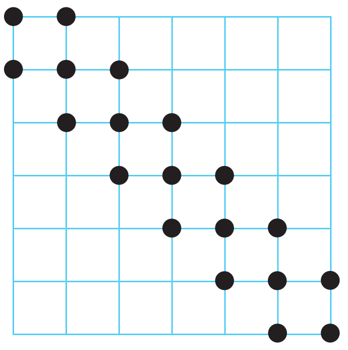
4



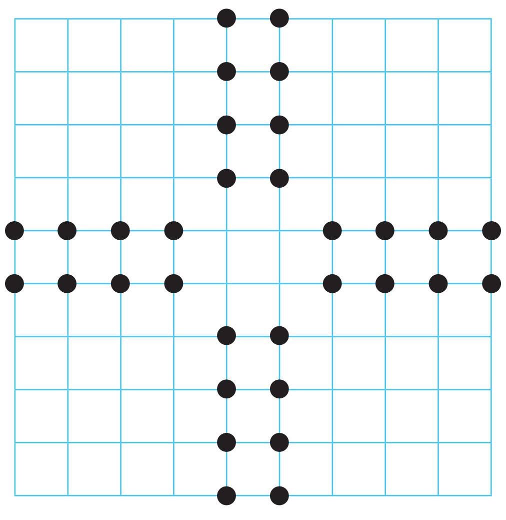
5



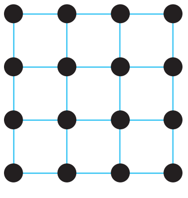
6



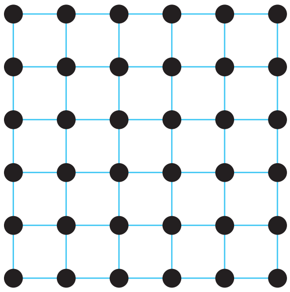
7



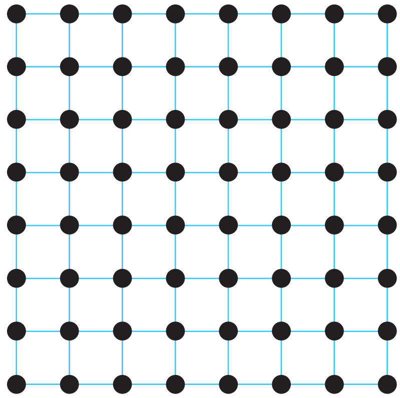
8 (Широко известная задача; автор неизвестен)



9 (По мотивам предыдущей)



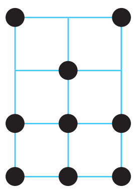
10



2. Построение наименьшего числа многоугольников по заданным вершинам

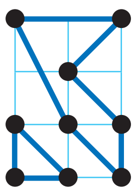
Не для всякой точечной конфигурации можно построить один многоугольник, как в задачах предыдущего раздела.

Вот пример подобной конфигурации:



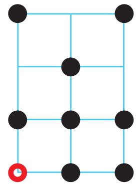
Можно задаться целью построить как можно меньше изолированных многоугольников, то есть не имеющих общих точек, задействовав при этом все точки конфигурации.

Для приведенной выше точечной конфигурации наименьшее число таких многоугольников равно двум:

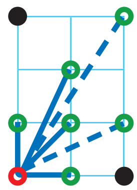


Докажем это. Построим доказательство от противного: предположим, что существует многоугольник с вершинами во всех точках данной конфигурации.

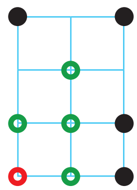
Попробуем найти такую точку, что когда мы начнем строить от нее многоугольник, то быстро зайдем в тупик, причем вариантов построения должно быть немного (это тоже принцип жадного алгоритма). Такой точкой может быть та, что выделена на следующем рисунке красным цветом (или симметричная ей относительно вертикальной оси):



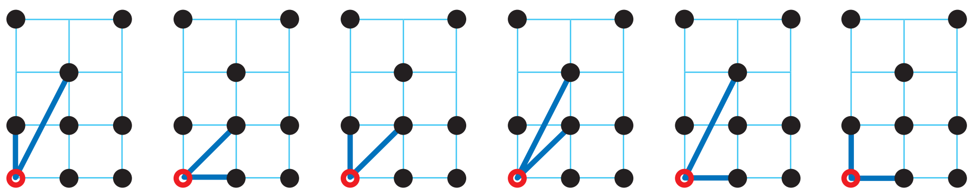
Она может быть соединена отрезком с шестью точками нашей конфигурации (на рисунке они выделены зеленым цветом):



Но отрезки, выделенные пунктиром, делят конфигурацию на две изолированные друг от друга группы точек (такие отрезки, очевидно, не могут быть сторонами искомого многоугольника). Отбрасываем их; итого остаются 4 возможные точки:



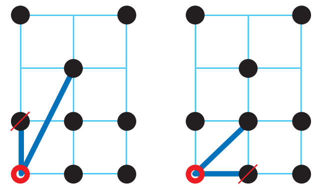
Несложно найти всевозможные углы с вершиной в красной точке. Всего их 6 (по числу сочетаний двух точек из 4):



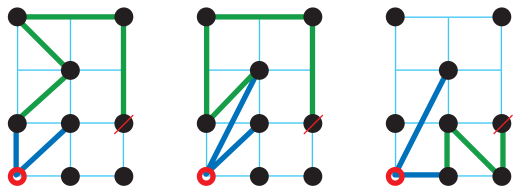
1 2 3 4 5 6

Ни для одного из этих вариантов не удастся построить многоугольник. В любом из них можно найти точку, от которой продолжить ломаную либо вообще невозможно, либо возможно, но она рано или поздно приведет в тупик.

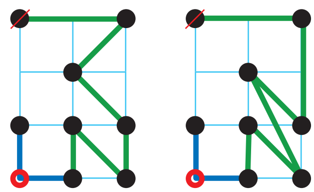
В первом и втором вариантах от перечеркнутой точки невозможно, не нарушая правил, отложить отрезок, либо такой отрезок изолирует точки:



В третьем, четвертом и пятом вариантах можно однозначно продолжить ломаную от одной из точек, но в результате мы заходим в тупик:



В шестом варианте возможны 2 продолжения, но оба они приводят в тупик:



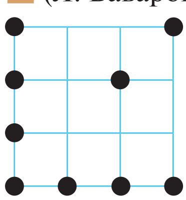
Таким образом, соединить все точки одной ломаной невозможно. Многоугольников будет не меньше двух. Но, поскольку пример с двумя многоугольниками построен, задачу можно считать решенной.

Задачи

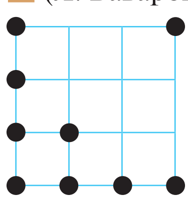
В задачах 1—17 нужно найти наименьшее число изолированных многоугольников, которые можно построить на приведенных точечных конфигурациях. Еще раз подчеркнем, что доказательство того, что именно найденное число многоугольников является наименьшим, сводится, по сути, к рациональному перебору возможностей.

Решения задач приведены в конце главы (с. 34).

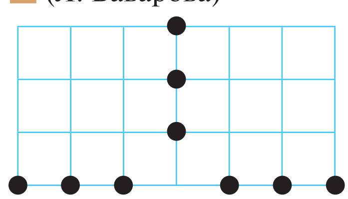
1 (Л. Баварова)



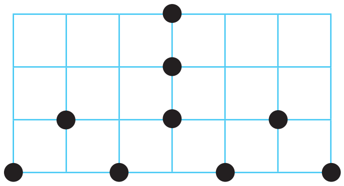
2 (Л. Баварова)



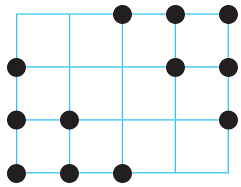
3 (Л. Баварова)



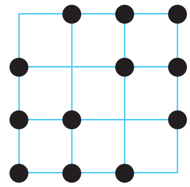
4 (Л. Баварова)



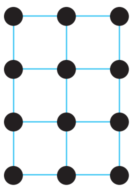
5 (Л. Баварова)



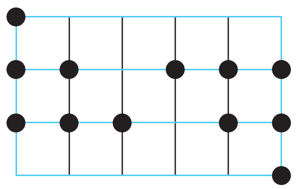
6 (Л. Баварова)



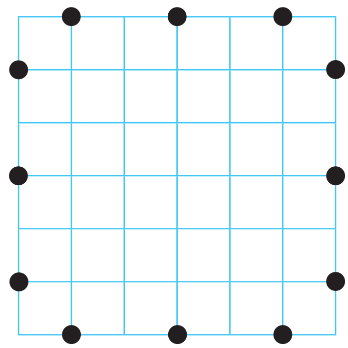
7 (Л. Баварова)



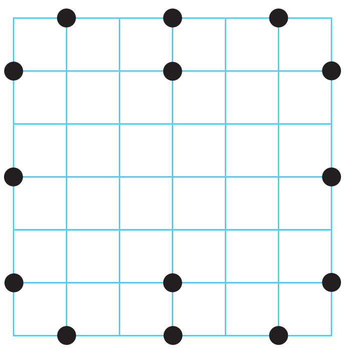
8 (Л. Баварова)



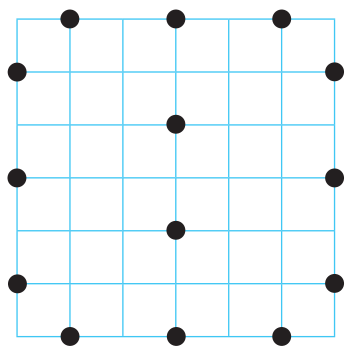
9 (Л. Баварова)



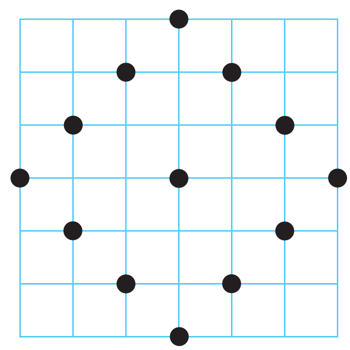
10 (Л. Баварова)



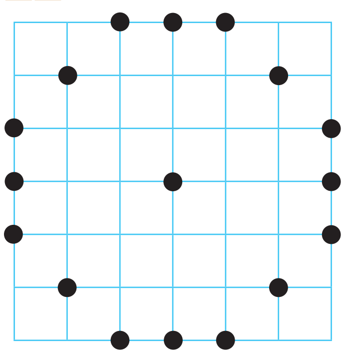
11 (Л. Баварова)



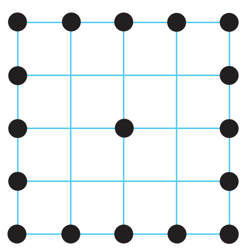
12



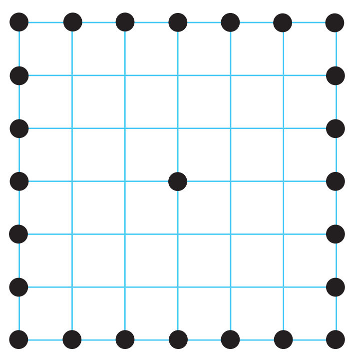
13



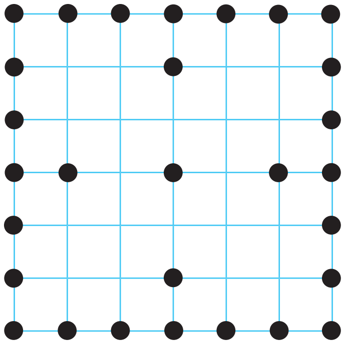
14



15



16

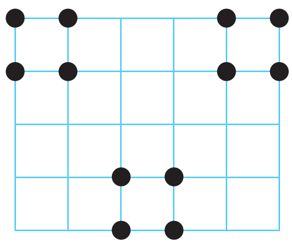


17 Для любого натурального числа *n* придумайте простой и универсальный способ построения конфигурации, через все точки которой проходит самое меньшее *n* изолированных многоугольников.

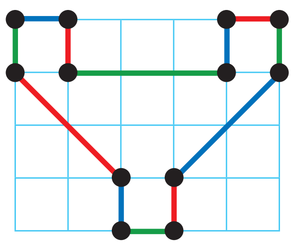
3. Построение многоцветного многоугольника с правильным чередованием цветов сторон

Это разновидность первого варианта (в котором нужно построить один многоугольник), но с дополнительным условием: отрезки цветные, и цвета соседних отрезков должны правильно чередоваться. Поэтому, если используется определенное число цветов, то число точек в конфигурации должно делиться на это число.

Допустим, используются синий, красный и зеленый цвета, а исходная точечная конфигурация — следующая:

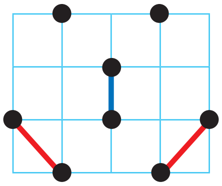


Приведем пример правильно окрашенного многоугольника, построенного на этих точках:

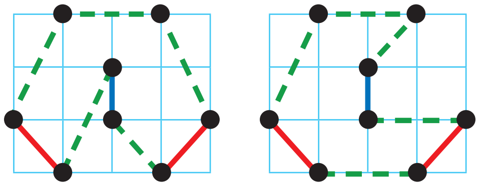


Задача состоит в следующем. Дана точечная конфигурация, число цветов и некоторые стороны окрашенного многоугольника. ***Нужно завершить его построение.***

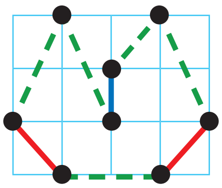
Приведем пример с использованием двух цветов — синего и красного:



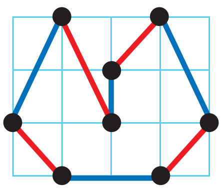
Точки в конфигурации можно соединить, например, такими способами, но ни в одном из них не удается получить чередование цветов:



Единственный (с точностью до симметрии) способ соединения точек, который позволяет раскрасить стороны правильно, такой:



В результате получится следующий цветной многоугольник:



В более сложном варианте головоломки число цветов не приводится: в условии дается лишь точечная конфигурация и несколько цветных отрезков.

Нужно найти наименьшее возможное число цветов и построить пример соответствующего многоугольника.

Приведем пример: