Под редакцией

М. И. СКАНАВИ

МАТЕМАТИКА
БОЛЬШОЙ СПРАВОЧНИК

Москва
АСТ
Мир и Образование

УДК 51(035)
ББК 22.1я2
М34

Математика. Большой справочник / В. В. Зайцев, В. В. Рыжков,
М34 М. И. Сканави; Под ред. М. И. Сканави. — Москва: АСТ: Мир и Образование, 2015. — 592 с. — (Учебник, проверенный временем).

ISBN 978-5-17-087466-8 (АСТ)
ISBN 978-5-94666-752-4 (Мир и Образование)

В справочнике излагается теоретический материал в рамках программ по математике для поступающих в вузы. Материал проиллюстрирован на примерах и задачах. В каждом параграфе даются упражнения для самостоятельной работы; в конце книги приводятся ответы ко всем упражнениям и подробный предметный указатель.

Пособие адресовано учащимся старших классов, абитуриентам и учителям математики. Используя его в комплекте с широко известным классическим «Сборником задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, учащиеся смогут успешно подготовиться к выпускным экзаменам в школе — сдаче ГИА и ЕГЭ, а также к поступлению даже в самый сложный технический вуз.

УДК 51(035)
ББК 22.1я2

ISBN 978-5-17-087466-8 (АСТ)
ISBN 978-5-94666-752-4 (Мир и Образование)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Большой справочник по математике» содержит базовый теоретический материал для подготовки к поступлению в вуз по широко известному классическому «Сборнику задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави.

Эта книга написана для учащихся старших классов средней школы и абитуриентов, желающих повторить курс математики, например, с целью подготовить себя к вступительным экзаменам в высшую школу. Она может быть использована и как пособие на подготовительных курсах вузов, и для самостоятельных занятий.

«Справочник» состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра и элементарные функции» (часть первая) и «Геометрия» (часть вторая). Авторы стремились изложить весь теоретический материал в рамках программы вступительных экзаменов и проиллюстрировать его на примерах и задачах. Также в каждом параграфе даются упражнения для самостоятельной работы. В конце книги приводятся ответы ко всем упражнениям и подробный предметный указатель.

Цель, которую поставили перед собой авторы, определяет построение книги и ее язык. В ней устраняются элементы концентризма, допускаемые в школьных программах, когда при первичном изучении математики приходится учитывать возрастные возможности учащихся и другие обстоятельства. При повторном изучении курса математики естественно построить его так, чтобы логически законченные темы излагались по возможности в одном месте. Например, развитие понятия числа от натурального до комплексного прослеживается в одной главе.

Кроме того, авторы стремились приблизить изложение многих вопросов (функции, графики, вычисление площадей и объемов и др.) к методам, принятым в курсе математики вуза. Необходимость такого изложения, перебрасывающего мостик от школьной математики к вузовской, видна из тех трудностей, которые часто испытывают на первом курсе вуза даже хорошо подготовленные учащиеся.

При подготовке настоящего издания большую работу по проверке ответов к упражнениям проделал Сергей Беркесов. Авторы выражают ему за это сердечную благодарность.

Используя материалы «Большого справочника» в комплекте со «Сборником задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, учащиеся старших классов смогут успешно подготовиться к выпускным экзаменам в школе — сдаче ГИА и ЕГЭ, а также к поступлению даже в самый сложный технический вуз.

О ПОЛЬЗОВАНИИ КНИГОЙ

Книга представляет собой повторительный курс элементарной математики в том смысле, что она рассчитана на читателя, уже изучавшего предмет, но желающего пополнить, укрепить и систематизировать свои знания (например, с целью подготовки в вуз). Поэтому предполагается, что, излагая тот или иной вопрос, можно ссылаться для пояснения или достижения полноты освещения вопроса и на последующий материал, предусматривая, что читатель имеет о нем хотя бы общее представление. Таких ссылок в тексте довольно много; для удобства пункты, на которые разбит материал, снабжены сплошной нумерацией. Ссылки даются в виде (см. п. 184) или просто (п. 55). Рисунки также имеют сплошную нумерацию; формулы имеют двойной номер (например, (4.5) или (217.3), т. е. пятая формула пункта 4 или третья формула пункта 217).

Читатель, не слишком позабывший материал школьной программы, может изучать книгу подряд; однако отнесение всей геометрии на конец нецелесообразно (геометрия обычно изучается параллельно с другим материалом). В качестве одного из вариантов можно предложить такую последовательность в изучении материала:

1) главы I—VII; 2) главы VIII, XVI и гл. XVII до п. 216 включительно; 3) остальные главы первой части; 4) остальной материал второй части.

При использовании книги учащимися подготовительных отделений вузов последовательность, естественно, определяется порядком прохождения материала на занятиях.

Мелкий шрифт употреблен для выделения материала, не входящего в минимальную обязательную программу.

Для читателя, желающего далее расширить свои математические познания (это важно для поступающих на специальности с повышенными требованиями к математической подготовке), можно рекомендовать следующую литературу:

1) Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, Пособие по математике для поступающих в вузы, изд-во «Наука»,

2) В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, Лекции и задачи по элементарной математике, изд-во «Наука».

Небольшое количество упражнений в книге никоим образом не заменяет задачника. Для приобретения необходимых навыков в решении задач и примеров можно использовать следующие задачники:

1) В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский, Т. Н. Маслова, И. Г. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, М. И. Сканави, Н. М. Федорова, Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы, изд-во «Высшая школа».

2) В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин, Задачи по элементарной математике, изд-во «Наука».

3) Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин, Задачи по элементарной математике (повышенной трудности), изд-во «Наука».

ВВЕДЕНИЕ

А. Определения. Аксиомы. Теоремы. Строгое изложение любой части математики основывается на введении некоторых простейших неопределяемых понятий (например, для геометрии: «точка», «прямая», «лежать на», «между» и т. д.). Обычно этим понятиям отвечает некоторый очевидный, интуитивно ясный смысл. Далее формулируются некоторые первичные, недоказуемые (в принципе или при данной форме изложения) утверждения; они называются *аксиомами* или *постулатами*. Например: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую. Это аксиоматически принимаемое положение использует неопределяемые понятия: «плоскость», «прямая», «точка», «лежать на» (чтобы фактически не употреблять других понятий, пришлось бы сформулировать аксиому несколько длиннее: если существует точка, лежащая на двух плоскостях, то существует и прямая, лежащая на этих плоскостях). Кроме специфических понятий каждой математической теории (арифметики, геометрии и т. п.), во всей математике используются также понятия *множества* (как определенного собрания любых элементов), *соответствия* (в выражениях типа «пусть каждому x соответствует определенное y» и т. п.) и общие правила логического ведения рассуждений[1]).

Дальнейшим используемым понятиям даются определения в терминах первоначальных или уже введенных понятий. Пример: *отрезком AB* прямой называется множество точек, включающее точки A, B и все точки, лежащие между ними. В этом определении, например, употреблены понятия «множество», «между» и т. д.

Относительно первоначальных и введенных с их помощью дальнейших понятий доказываются (на основе аксиом и ранее доказанных утверждений, с помощью обычных правил логики) новые утверждения, называемые *теоремами*, иногда *леммами* (обычно леммой называют утверждение, не имеющее важного самостоятельного значения, но используемое при доказательстве других теорем).

[1]) Исключение составляют книги по основаниям математики, где критически исследуют и сами правила логического вывода и обоснованность использования понятий, относящихся к множествам.

Полностью выдержанное по указанной схеме изложение математических дисциплин называется *аксиоматическим* (точнее, полуформальным). Фактически осуществить его в полной мере в рамках учебника не удается, так как объем его получился бы слишком большим, а изложение очень утомительным. Поэтому и в школьных учебниках и в данной книге аксиомы приводятся лишь частично, часть теорем сообщается без доказательства, а доказательства некоторых других построены с бóльшим или меньшим привлечением интуитивно ясных соображений (которые в принципе могли бы быть доказаны исходя из полной системы аксиом).

Б. Логическое следование. Необходимые и достаточные условия. Утверждения (теоремы) в математике, явно или неявно, имеют следующую форму: «если..., то...». Например: «если одна из медиан треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный». Утверждение: «медианы треугольника делят друг друга в отношении 2:1» — можно сформулировать в сходной форме: «если отрезки AM и BN являются медианами треугольника ABC, то они делят друг друга в отношении 2:1».

Таким образом, для доказательства теоремы необходимо бывает установить, что из некоторых предположений (посылок) с логической необходимостью вытекает некоторый результат (вывод).

В логике тот факт, что из посылки A вытекает вывод B, обозначают так: $A \Rightarrow B$ (или каким-либо сходным образом).

В этом случае говорят, что A является *достаточным* условием для B; в свою очередь B является *необходимым* условием для A. Это означает, что для справедливости B достаточно (но, вообще говоря, не необходимо) выполнения A; для справедливости A необходимо (но, вообще говоря, недостаточно) выполнение B. Например, в утверждении: «если фигуры равны, то они равновелики» (т. е. имеют равные площади) — равенства фигур достаточно для равенства их площадей. В то же время равенство площадей — необходимое условие равенства фигур. Если оказывается, что не только $A \Rightarrow B$, но и $B \Rightarrow A$, то оба утверждения A и B называют *эквивалентными*. В математических текстах при этом употребляют выражения типа: «A тогда и только тогда, когда B», «A, если и только если B». Тот же смысл имеют и выражения: «A необходимо и достаточно для B». Пример: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали делили друг друга пополам. Говорят, что свойство диагоналей делить друг друга пополам является необходимым и достаточным условием того, чтобы четырехугольник был параллелограммом.

В. Прямая, обратная, противоположная теоремы. Доказательства от противного. Наряду с каким-либо утверждением A (при этом вообще, под утверждением понимается любое повествовательное предложение, о котором всякий раз можно сказать, что оно истинно либо ложно) можно рассматривать его отрицание, утверждение «не A», обозначаемое короче $\bar{A}$ и состоящее в том, что A ложно. A и $\bar{A}$ всегда образуют такую пару утверждений, что из них одно истинно, а другое ложно.

Приведем примеры.

A	$\bar{A}$
1) Данные три точки лежат на одной прямой.	Данные три точки не лежат на одной прямой.
2) Квадрат любого действительного числа положителен.	Существует хотя бы одно действительное число, квадрат которого отрицателен или равен нулю.
3) Число a меньше числа b.	Число a больше или равно числу b.
4) При любом натуральном $n \geqslant 3$ существует правильный n-угольник	Существует хотя бы одно натуральное $n \geqslant 3$ такое, что не существует правильного n-угольника.

Ясно, что в примерах 1) и 3) утверждение A или $\bar{A}$ окажется истинным (ложным) в зависимости от заданных точек или чисел a, b. В примере 2) A ложно, $\bar{A}$ истинно, так как $0^2=0$; в примере 4) A истинно, а $\bar{A}$ ложно.

Представим себе теперь некоторое математическое утверждение (теорему) вида $A \Rightarrow B$; наряду с ним можно рассматривать следующие три другие утверждения (теоремы):

$B \Rightarrow A$ (обратное утверждение), (1)

$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ (противоположное утверждение), (2)

$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (утверждение, обратное противоположному или, что то же — противоположное обратному). (3)

Их называют соответственно *обратной теоремой*, *противоположной теоремой*, *теоремой*, *обратной противоположной*; следует иметь при этом в виду, что *теоремой* мы обычно называем истинное утверждение, вообще же для любого утверждения это заранее не предполагается.

Утверждения $A \Rightarrow B$ и (3) эквивалентны: именно, если верно утверждение $A \Rightarrow B$, то верно и обратное противоположному $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (и обратно). Аналогично, эквивалентны обратное и противоположное утверждения (1), (2).

Доказательство этого правила вытекает из условия считать, что из двух высказываний A и $\bar{A}$ всегда одно истинно, а другое ложно (в логике это называют *принципом исключенного третьего*).