ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

МЕЖДУ ДЕЛОМ И ШУТКОЙ В ГЕОМЕТРИИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Занимательная геометрия» написана как для друзей математики, так и для тех, от кого почему-либо оказались скрытыми многие привлекательные стороны математики. Еще больше эта книга предназначается для читателей, которые обучались (или сейчас обучаются) геометрии только у классной доски и поэтому не привыкли замечать знакомые геометрические отношения в окружающем нас мире вещей и явлений, не приучились пользоваться приобретенными геометрическими знаниями на практике, в затруднительных случаях жизни, в походе, в бивуачной или фронтовой обстановке.

Возбудить у читателя интерес к геометрии или, говоря словами автора, «внушить охоту и воспитать вкус к ее изучению» — прямая задача настоящей книги.

Автор выводит геометрию «из стен школьной комнаты на вольный воздух, в лес, поле, к реке, на дорогу, чтобы под открытым небом отдаться непринужденным геометрическим занятиям без учебника и таблиц», привлекает внимание читателя к страницам Л. Н. Толстого и А. П. Чехова, Ж. Верна и М. Твена, находит тему для геометрических задач в произведениях Н. В. Гоголя и А. С. Пушкина и, наконец, предлагает «пестрый подбор задач, любопытных по сюжету, неожиданных по результату».

ЧАСТЬ I

—

ГЕОМЕТРИЯ НА СВЕЖЕМ ВОЗДУХЕ

«Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры».

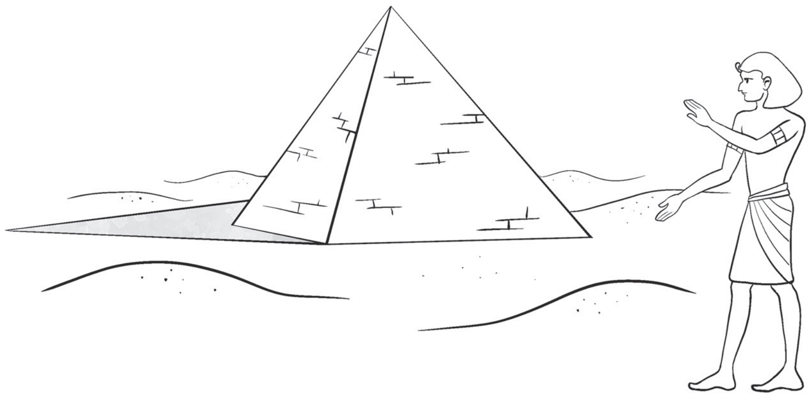
Галилей

ПО ДЛИНЕ ТЕНИ

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, я понял, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения с помощью весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ, без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес, говорит предание, избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени[1]. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени...



Задача греческого мудреца представляется нам теперь по-детски простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, а именно следующие два (из которых первое Фалес открыл сам):

1) углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно — стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собой;
2) сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

---

[1] Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды, ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

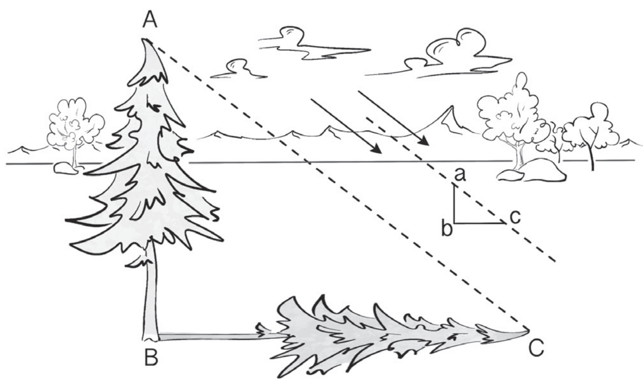
Только вооруженный этим знанием Фалес вправе был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: Солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции:

$$AB : ab = BC : bc,$$

то есть высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников *ABC* и *abc* (по двум углам).

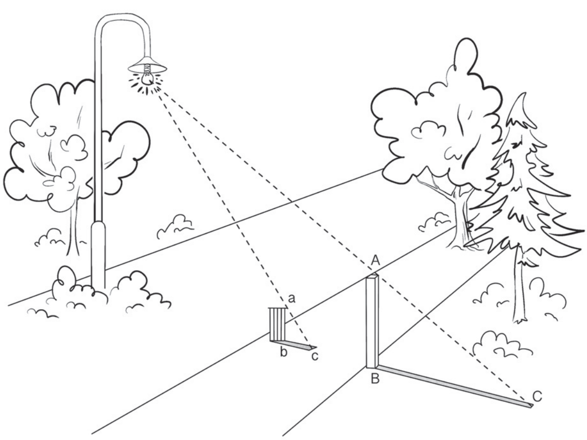


▲ *Измерение высоты дерева по тени*

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, — оно не оправдается. На рисунке (с. 8) в задаче вы видите, что столбик *AB* выше тумбы *ab* примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы (*BC* : *bc*) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, а в другом нет, без геометрии невозможно.

ЗАДАЧА

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря — не параллельны. Последнее очевидно, но почему вправе мы считать лучи Солнца параллельными, хотя они, безусловно, пересекаются в том месте, откуда исходят?



▲ *Когда такое измерение невыполнимо*

РЕШЕНИЕ

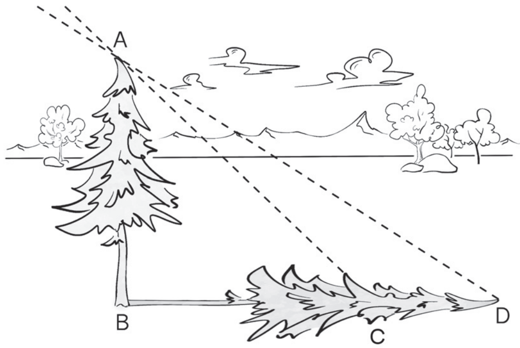
Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными, потому что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю на расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другой описали окружность радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли (то есть радиусом 150 000 000 км), то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга длиной 1 км. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi x \times 150\,000\,000$ км = 940 000 000 км. Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, то есть около 2 600 000 км, одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, то есть равна 43 000 км, а одна дуговая секунда еще в 60 раз меньше, то есть 720 км. Но наша дуга имеет длину всего 1 км, значит, она соответствует углу $\frac{1}{720}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов, следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, параллельными прямыми[1].

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рисунке показано, почему вследствие этого

[1] Другое дело лучи, направленные от какой-нибудь точки Солнца к концам земного диаметра; угол между ними достаточно велик для измерения (около 17″). Определение этого угла дало в руки астрономов одно из средств для того, чтобы установить, как велико расстояние от Земли до Солнца.

тень *BC* дерева имеет еще придаток в виде полутени *CD*, постепенно сходящей на нет.



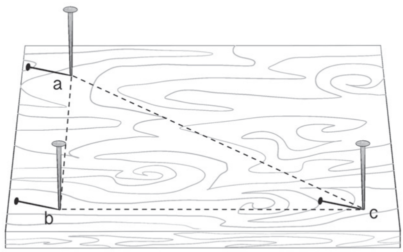
▲ *Как образуется полутень*

Угол *CAD* между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, то есть половине градуса. Ошибка, происходящая оттого, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком даже низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т. д. — и делает окончательный результат малонадежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

ЕЩЕ ДВА СПОСОБА

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.

Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника, и в них втыкают торчком по булавке. Пусть у вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, – и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния.

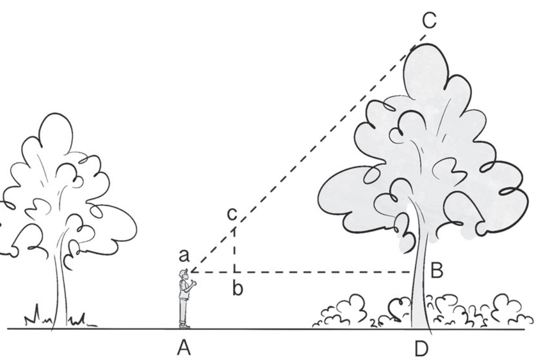


▲ *Булавочный прибор для измерения высот*

Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

Обращение с ним не сложнее изготовления.

—

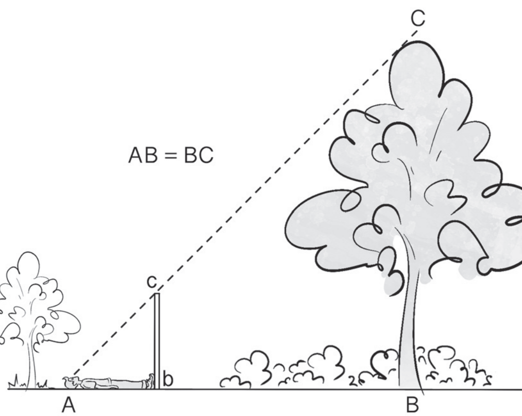


▲ *Схема применения булавочного прибора*

Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место *A*, из которого, глядя на булавки *a* и *c*, увидите, что они покрывают верхушку *C* дерева: это значит, что продолжение гипотенузы *ac* проходит через точку *C*. Тогда, очевидно, расстояние *aB* равно *CB*, так как угол $a = 45°$.

Следовательно, измерив расстояние *aB* (или на ровном месте одинаковое с ним расстояние *AD*) и прибавив *BD*, то есть возвышение *aA* глаза над землей, получите искомую высоту дерева.

По другому способу вы обходитесь даже без булавочного прибора. Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту. Место для шеста надо выбрать таким образом, чтобы лежа, как показано на рисунке, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник *Abc* — равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45°$ и, следовательно, $AB = BC$, то есть искомой высоте дерева.



▲ *Другой способ определения высоты*

ПО СПОСОБУ ЖЮЛЯ ВЕРНА

Следующий, тоже весьма несложный, способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюля Верна в известном романе «Таинственный остров».

Жюль Верн (1828–1905)

«– Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида, – сказал инженер.

— Вам понадобится для этого инструмент? — спросил Герберт.

— Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

Взяв прямой шест футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на 2 в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

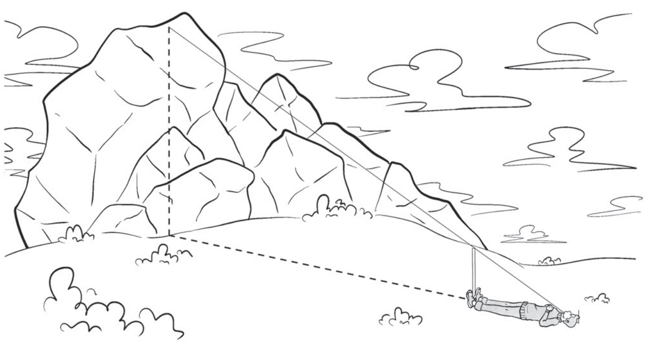
Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня. Эту точку он тщательно пометил колышком.

— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

— Да.

— Помнишь свойства подобных треугольников?

— Их сходственные стороны пропорциональны.



▲ *Как измерили высоту скалы герои Жюля Верна*