

ОГЭ

Н. А. КИМ

МАТЕМАТИКА
БОЛЬШОЙ
СУПЕРСБОРНИК

**ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОСНОВНОМУ
ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ**

Москва
Издательство АСТ
2022

УДК 373:51
ББК 22.1я721
К40

12+

Ким, Наталья Анатольевна.

К40 ОГЭ : Математика : большой суперсборник для подготовки к основному государственному экзамену / Н. А. Ким. — Москва: АСТ, 2022. — 408 с. — (ОГЭ. Большой суперсборник для подготовки к основному государственному экзамену).
ISBN 978-5-17-150740-4

Данное пособие предназначено для учащихся 9 классов. Оно позволяет в кратчайшие сроки успешно подготовиться к сдаче основного государственного экзамена по математике.

В пособии вы найдёте теорию, разбор типовых заданий, тестовые задания для самостоятельного решения и 10 тренировочных вариантов экзаменационных работ необходимые для подготовки к решению заданий ОГЭ.

Ответы на все задания, размещённые в пособии, помогут в осуществлении контроля и оценки своих знаний.

Материал пособия подобран и изложен на основе большого педагогического опыта автора в подготовке учеников к экзаменам по математике в формате и ОГЭ и ЕГЭ.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Справочное издание

Серия «Большой суперсборник для подготовки к ОГЭ»

Ким Наталья Анатольевна
ОГЭ • МАТЕМАТИКА

Большой суперсборник для подготовки к основному государственному экзамену

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *Н. А. Шармай*

Технический редактор *Е. П. Кудиярова*

Корректор *О. Б. Маргевич*

Вёрстка *Т. А. Шармай*

Подписано в печать 15.07.2022. Формат 60×84^{1/8}. Усл. печ. л. 47,43.
Гарнитуры SchoolBook. Тираж 4000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции ОК-034-2014 (КПЕС 2008);
58.11.1 — книги, брошюры печатные

Произведено в Российской Федерации.

Дата изготовления: август 2022 г.

Изготовитель: ООО «Издательство АСТ», 129085, г. Москва,
Звёздный бульвар, дом 21, стр. 1, комн. 705, пом. I, 7 этаж.

Адрес места осуществления деятельности по изготовлению продукции:

123112, г. Москва, Пресненская наб., д. 6, стр. 2,

Деловой комплекс «Империya», 14, 15 этажи


Наши электронные адреса: www.ast.ru; e-mail: ask@ast.ru


Присоединяйтесь к нам!

www.ast.ru/redactions/obrazovatelnye-proekty

 vk.com/ast.deti

 ok.ru/ast.deti

 t.me/astdeti

 zen.yandex.ru/astdeti

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:

123317, г. Москва, Пресненская наб., д. 6, стр. 2,

Деловой комплекс «Империya», а/я № 5

ISBN 978-5-17-150740-4

© Н. А. Ким, 2022

© ООО «Издательство АСТ», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
ТЕМА 1. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ	9
1.1. Натуральные числа	13
1.2. Дроби	18
1.3. Проценты	23
1.4. Модуль числа	25
1.5. Арифметические действия с действительными числами	26
1.6. Числовые и буквенные выражения	28
ТЕМА 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ	46
2.1. Алгебраические выражения. Степень	47
2.2. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень	52
2.3. Одночлен. Многочлен	54
ТЕМА 3. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	67
3.1. Уравнения	69
3.1.1. Алгоритмы решения линейных, квадратных и рациональных уравнений .	69
3.1.2. Системы уравнений с двумя переменными	76
3.1.3. Метод замены переменной	78
3.2. Текстовые задачи	82
3.2.1. Задачи на части и проценты	83
3.2.2. Задачи на выполнение определённого объёма работы	86
3.2.3. Задачи на движение	89
3.2.4. Задачи на сплавы, растворы и смеси	93
3.3. Неравенства	96
3.3.1. Алгебраические неравенства	98
3.3.2. Системы неравенств с одной переменной	102
ТЕМА 4. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	123
4.1. Понятие числовой последовательности	124
4.2. Арифметическая прогрессия	125
4.3. Геометрическая прогрессия	132
4.4. Задачи на применение прогрессии	138

ТЕМА 5. ФУНКЦИИ	141
5.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции	143
5.2. Способы задания функции	145
5.3. График функции	146
5.4. Графики элементарных функций.	148
5.5. Чётность и нечётность функций.	150
5.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность	151
5.6.1. Линейная функция	151
5.6.2. Прямая пропорциональность	152
5.7. Обратная пропорциональная зависимость	154
5.8. Квадратичная функция и её свойства	156
5.9. График функции $y = \sqrt{x}$ и её свойства	162
5.10. Функция $y = x $ и её свойства	163
5.11. Преобразования графиков функций	164
ТЕМА 6. СРАВНЕНИЕ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ	194
6.1. Координатный луч	195
6.2. Координатная прямая	196
6.3. Сравнение рациональных чисел	196
ТЕМА 7. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)	206
7.1. Углы	211
7.2. Треугольники	215
7.3. Окружность и круг	231
7.4. Четырёхугольники. Многоугольники	239
7.5. Описанная и вписанная окружности	253
ТЕМА 8. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ОПИСАТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИКИ	283
8.1. Комбинаторные задачи. Перебор вариантов	284
8.2. Статистика. Статистические характеристики	285
8.3. Элементы теории вероятностей	286
8.3.1. Основные понятия теории вероятностей.	286
8.3.2. Классическое определение вероятности	287
8.3.3. Теоремы о вероятностях событий	287
8.3.4. Алгоритм решения задач на вероятность	288

Ответы к заданиям для самостоятельного решения	301
Тема 1. Числа и вычисления	301
Тема 2. Алгебраические выражения	303
Тема 3. Уравнения и неравенства	304
Тема 4. Числовые последовательности	307
Тема 5. Функции	308
Тема 6. Сравнение на координатной прямой	310
Тема 7. Геометрия (планиметрия)	310
Тема 8. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики	312
Инструкция по выполнению экзаменационной работы	315
ВАРИАНТЫ ТРЕНИРОВОЧНЫХ РАБОТ	316
Вариант 1	316
Вариант 2	325
Вариант 3	334
Вариант 4	343
Вариант 5	352
Вариант 6	361
Вариант 7	370
Вариант 8	379
Вариант 9	388
Вариант 10	396
Ответы и критерии оценивания	405

ПРЕДИСЛОВИЕ

Организация систематического повторения материала, изученного в 5–9 классах, является основной подготовки к ОГЭ. Данная книга — это учебное пособие для быстрой и эффективной подготовки школьников к основному государственному экзамену по математике. Она будет полезна и преподавателям, занимающимся подготовкой учащихся к сдаче экзамена в формате ОГЭ.

Пособие призвано оказать помощь в систематизации, углублении, обобщении знаний основных тем курса:

- «Вычисления и преобразования»,
- «Алгебраические выражения»,
- «Уравнения и неравенства»,
- «Числовые последовательности»,
- «Функции»,
- «Сравнение на координатной прямой»,
- «Геометрия» (планиметрия),
- «Элементы комбинаторики, теории вероятности, описательной статистики».

Материал данного пособия содержит в себе всё необходимое, чтобы вам не пришлось «вооружаться» огромным количеством дополнительных книг и электронных источников.

Краткая, но в то же время очень ёмкая теоретическая информация позволит легко и быстро получить справочные сведения, необходимые к изучению конкретных тем.

В каждой теме Вы найдёте подробный разбор экзаменационных заданий.

Закрепить полученные знания можно только на практике. Для этого помогут большое количество примеров, задач и задания для самостоятельного решения, размещённые в конце каждой темы. Ответы в конце раздела позволят Вам проверить себя и оценить уровень подготовки.

В нашем пособии Вам предлагаются 10 тренировочных экзаменационных вариантов, составленных в соответствии с демонстрационным вариантом и спецификацией 2022 года. Каждый вариант включает в себя 25 заданий, различающихся уровнем сложности. Задания проверяют материал всех тематических блоков. В конце размещены ответы для проверки решений.

С нашим суперсборником Вы легко преодолеете сложности при подготовке к экзаменам. Занимаясь по нему, приобретёте умения и навыки для уверенной и успешной сдачи основного государственного экзамена.

Материал пособия подобран и изложен на основе большого педагогического опыта автора в подготовке учеников к экзаменам по математике в формате и ОГЭ, и ЕГЭ.

СОВЕТ

Постарайтесь запомнить как можно больше формул. Разберите примеры, не пропускайте их. Они помогут лучше усвоить правила и алгоритмы вычислений, отработать навыки быстрого выполнения заданий разных типов.

Внимательно проверяйте решения простых задач, прежде чем погружаться в решение сложных!

В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий рекомендуем в процессе подготовки к экзамену обращаться к материалам сайта официального разработчика экзаменационных заданий — Федерального института педагогических измерений: www.fipi.ru.

Желаем успеха!

- ➔ Краткие теоретические сведения
- ➔ Примеры экзаменационных заданий
- ➔ Разбор и алгоритмы решений
- ➔ Задания для самостоятельного решения
- ➔ Ответы

Тема 1

ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

*Человек, не знакомый с азами науки чисел,
не может преуспеть ни в одном деле.*

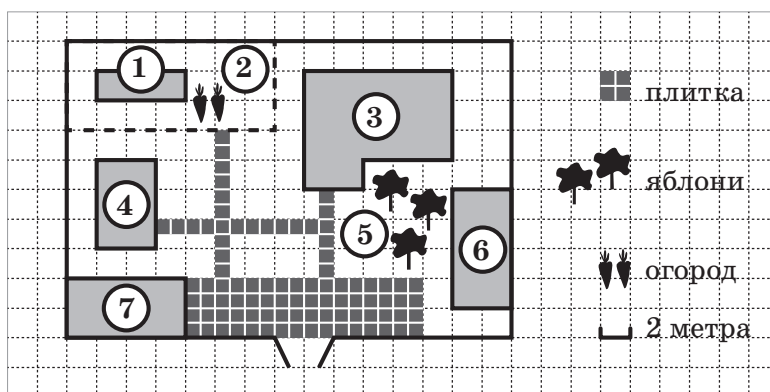
Р. Бэкон

Один из основных разделов математики – это «Числа и вычисления». Для успешной сдачи ОГЭ в нём важно развивать скорость устных вычислений и преобразований, приобрести навыки решения простейших задач «в уме».

Изучая материал этой темы, необходимо уделить особое внимание вычислительным навыкам (без использования калькулятора) над всеми рациональными и иррациональными числами, а, разбирая различные способы вычислений, повторить алгоритмы и правила действий над числами.

♦ Рассмотрим решения заданий на данную тему из демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов (КИМ) ОГЭ по математике, представленного на сайте www.fipi.ru.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1–5.



На плане изображено домохозяйство по адресу: с. Авдеево, 3-й Поперечный пер., д. 13 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляется через единственные ворота.

Тема 1 • Числа и вычисления

При входе на участок справа от ворот находится баня, а слева — гараж, отмеченный на плане цифрой 7. Площадь, занятая гаражом, равна 32 кв. м. Жилой дом находится в глубине территории. Помимо гаража, жилого дома и бани, на участке имеется сарай (подсобное помещение), расположенный рядом с гаражом, и теплица, построенная на территории огорода (огород отмечен цифрой 2). Перед жилым домом имеются яблоневые посадки.

Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м × 1 м. Между баней и гаражом имеется площадка площадью 64 кв. м, вымощенная такой же плиткой.

К домохозяйству подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу. В бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр без запятых, пробелов и других символов.

Ответ:

Объекты	Жилой дом	Сарай	Баня	Теплица
Цифры				

Решение.

Прочитай внимательно условие, и ты найдёшь в условии подсказки:

- ▶ перед жилым домом имеются яблоневые посадки — 3;
- ▶ сарай расположен рядом с гаражом (гараж отмечен на плане цифрой 7) — 4;
- ▶ при входе на участок справа от ворот находится баня — 6;
- ▶ теплица построена на территории огорода (огород отмечен цифрой 2) — 1.

Ответ: 3461.

2. Тротуарная плитка продаётся в упаковках по 4 штуки. Сколько упаковок плитки понадобилось купить, чтобы выложить все дорожки и площадку перед гаражом?

Ответ: _____.

Решение.

На дорожки и на площадку перед гаражом нужно всего 89 тротуарных плиток. Известно, что в упаковке 4 плитки. Если разделим 89 на 4, то получим 22,25. Округлим до 23.

Ответ: 23.

3. Найдите площадь, которую занимает жилой дом. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: _____.

Решение.

Для удобства вычисления «разрежем» жилой дом на плане на два прямоугольника, площади которых равны 60 м^2 и 8 м^2 . Вся площадь, которую занимает жилой дом, равна $60 + 8 = 68 \text{ (м}^2\text{)}$.

Ответ: 68.

4. Найдите расстояние от жилого дома до гаража (расстояние между двумя ближайшими точками по прямой) в метрах.

Ответ: _____ .

Решение.

Расстояние между двумя ближайшими точками по прямой — это гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 метров.

Вычислим длину гипотенузы по теореме Пифагора:

$c^2 = a^2 + b^2$, где c — гипотенуза, a и b — катеты.

$c^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $c = 10$ (метров).

Ответ: 10.

5. Хозяин участка планирует устроить в жилом доме зимнее отопление. Он рассматривает два варианта: электрическое или газовое отопление. Цены на оборудование и стоимость его установки, данные о расходе газа, электроэнергии и их стоимости даны в таблице.

	Нагреватель (котёл) (тыс. руб.)	Прочее оборудование и монтаж (руб.)	Сред. расход газа / сред. потребление мощности	Стоимость газа / электроэнер- гии
Газовое отопление	24	18 280	1,2 куб. м/ч	5,6 руб./ куб. м.
Электр. отопление	20	15 000	5,6 кВт	3,8 руб./ (кВт · ч)

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовое оборудование. Через сколько часов непрерывной работы отопления экономия от использования газа вместо электричества компенсирует разность в стоимости установки газового и электрического отопления?

Ответ: _____ .

Решение.

Пусть x — это время (в часах) непрерывной работы отопления.

Стоимость газового отопления:

$$24\,000 + 18\,280 + 1,2 \cdot 5,6 \cdot x.$$

Стоимость электрического отопления:

$$2000 + 15\,000 + 5,6 \cdot 3,8 \cdot x.$$

Решим уравнение:

$$24\,000 + 18\,280 + 1,2 \cdot 5,6 \cdot x = 2000 + 15\,000 + 5,6 \cdot 3,8 \cdot x;$$

$$42\,280 + 6,72 \cdot x = 35\,000 + 21,28 \cdot x;$$

$$7280 = 14,56 \cdot x;$$

$$x = 500 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 500.

- ♦ Найдите значение выражения $\frac{1}{4} + 0,07$.

Ответ: _____.

Решение.

Заметим, что $\frac{1}{4} = 0,25$. Поэтому $0,25 + 0,07 = 0,32$.

Ответ: 0,32.

- ♦ Чтобы перенести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1,8t_C + 32$, где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -25 градусов по шкале Цельсия?

Ответ: _____.

Решение.

Имея формулу перевода значения температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, подставим число -25 вместо t_C .

Вычислим получившееся числовое выражение: $1,8 \cdot (-25) + 32 = -45 + 32 = -13$ (градусов).

Ответ: -13 .

СОВЕТ

Первые 5 задач из варианта ОГЭ объёмные (в зависимости от типа и сложности вычислений), и их решение может занять больше 30 минут. Вероятно, из-за этого многие девятиклассники боятся этих заданий, пропуская, даже не пытаясь решить. Мы всё же советуем попробовать их выполнить! Если в первые 15 минут не получится решить все 5 заданий, то к ним можно вернуться в конце выполнения экзаменационной работы.

Перейдём к теоретической части. Вспомним такие понятия, как натуральные числа, дроби, рациональные и действительные числа, степень. Научимся вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования буквенных выражений, включающих степени.

СОВЕТ

Постарайся запомнить как можно больше формул!
Внимательно разбери все примеры. Они помогут лучше усвоить правила и алгоритмы вычислений, отработать навыки быстрого выполнения заданий разных типов.

1.1. Натуральные числа

ТС ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Десятичная запись натуральных чисел \mathbb{N}

• Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**. Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел**.

• В натуральном ряду за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряду нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

• Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**.

• Этих цифр десять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа.

Например, в числе 548 цифра 4 обозначает число сорок, а в числе 4175 — число четыре тысячи.

• Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**. Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе — **разрядом десятков**, третье — **разрядом сотен** и т. д.

Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.

• Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называют **десятичной**. Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего старшего разряда.

Арифметические действия с натуральными числами.

Степень числа

Закон	Действия	
	Сложение $a + b = p$ a, b — слагаемые, p — сумма	Умножение $a \cdot b = p$ a, b — множители, p — произведение
Переместительный	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Сочетательный	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Распределительный	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

• **Степенью** числа a с натуральным показателем n , бóльшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a : $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, где $n > 1$.

• Степенью числа a с показателем 1 называют само это число: $a^1 = a$.

• Степенью числа a с показателем 0 называют число 1: $a^0 = 1$.

Признаки делимости натуральных чисел

Обозначение: a делится на $b \Leftrightarrow a : b$

Чётные числа: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Число делится на <u>2</u> ($2 = 2^1$), если его последняя цифра чётная	$111354 : 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4$ — чётное число
Число делится на <u>4</u> ($4 = 2^2$), если число, составленное из последних двух цифр, делится на 4	$17332 : 4 \Rightarrow 32 : 4 = 8$
Число делится на <u>8</u> ($8 = 2^3$), если число, составленное из последних трёх цифр, делится на 8	$97216 : 8 \Rightarrow 216 : 8 = 27$
Число делится на <u>5</u> ($5 = 5^1$), если его последняя цифра 0 или 5	$3715 : 5 \Rightarrow 5$ — последняя цифра

Число делится на <u>25</u> ($25 = 5^2$), если число, составленное из двух последних цифр, делится на 25 или две последние цифры 0	$17375 : 25 \Rightarrow 75 : 25 = 3$
Число делится на <u>10</u> , если его последняя цифра 0	$530 : 10 \Rightarrow 0$ — последняя цифра
Число делится на <u>3</u> , если сумма его цифр делится на 3	$381 : 3 \Rightarrow 3 + 8 + 1 = 12;$ $12 : 3 = 4$
Число делится на <u>9</u> , если сумма его цифр делится на 9	$927 : 9 \Rightarrow 9 + 2 + 7 = 18;$ $18 : 9 = 2$
Число делится на <u>11</u> , если разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11	$8536 : 11 \Rightarrow (3 + 8) -$ $-(5 + 6) = 0; 0 : 11 = 0$

Простые и составные числа

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число:

- числа 2, 3, 5, 7, 11, 13 являются простыми;
- число 2 — это единственное чётное наименьшее простое число;
- простых чисел бесконечно много.

Натуральное число, имеющее больше двух натуральных делителей, называют **составным**.

Например, числа 6, 15, 64, 1000 являются составными, так как каждое число можно разложить на различные множители, не равные 1: $6 = 2 \cdot 3$; $15 = 3 \cdot 5$; $64 = 8 \cdot 8$; $1000 = 500 \cdot 2$.

• Поскольку число 1 имеет только один делитель, его не относят ни к простым, ни к составным.

Наибольший общий делитель (НОД)

• Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

• Наибольший общий делитель чисел a и b обозначают:

$$\text{НОД}(a; b).$$

Например, $\text{НОД}(56; 84) = 2 \cdot 7 = 14$. Так как $56 = 2 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ и $84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

• Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то их называют **взаимно простыми**.

Например, числа 55 и 3 взаимно простые, поскольку $\text{НОД}(55; 3) = 1$.

• Если число a — делитель числа b , то $\text{НОД}(a; b) = a$.

Например, $\text{НОД}(25; 75) = 25$.