Т. А. Колесникова

МАТЕМАТИКА

Прокачай свой уровень на МАКСИМУМ

ЕГЭ ОГЭ ВПР

Москва

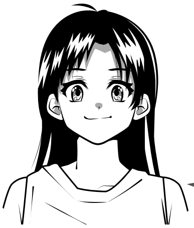
СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Перед вами справочник, который поможет обобщить, систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы. В книге рассмотрены следующие разделы математики: «Алгебра и начала анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики».

Весь теоретический материал систематизирован и сопровождается наглядными схемами и таблицами, поясняющими рисунками, примерами решения задач. Это обеспечит максимальную сконцентрированность внимания, эффективное повторение и качественную подготовку по предмету.

На страницах книги читателя встретят различные персонажи, которые расскажут интересную информацию, дадут полезные и содержательные ответы и пояснения. Это поможет проанализировать научные факты и проблемы, связанные с выполнением отдельных заданий, сделать процесс усвоения материала более насыщенным и продуктивным.



Пособие поможет учащимся и выпускникам при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к сдаче государственной итоговой аттестации.

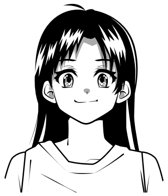
Книга будет полезна школьникам, студентам и учителям, а также всем, кто интересуется математикой.

Желаем успехов!

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

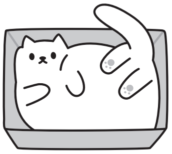
ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Числовыми называются множества, элементами которых являются числа.



Множество натуральных чисел образуют числа, которые используются при счёте предметов.

$$N = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\ldots\}$$



Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество целых чисел.

$$Z = \{\ldots -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\ldots\}$$

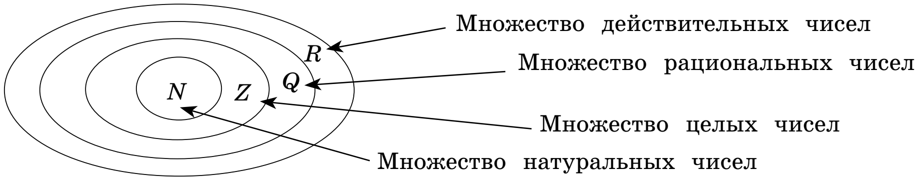
Множество рациональных чисел составляют числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (конечные или бесконечные периодические десятичные дроби). Обозначение: Q.

Множество иррациональных чисел составляют числа, которые не могут быть представлены в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (бесконечные десятичные непериодические дроби). Обозначение: I.

Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел. Обозначение: R.

$$R = Q \cup I$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ



Немецкий математик XIX в. Л. Кронекер, желая подчеркнуть естественные причины появления множества натуральных чисел, сказал: «Бог создал натуральные числа, всё остальное — дело рук человека».

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество натуральных чисел является бесконечным, т. к. для любого натурального числа n найдётся натуральное число больше, чем n.

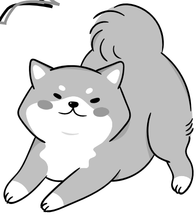
ДЕЙСТВИЯ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

СЛОЖЕНИЕ

$$a+b=c$$

слагаемые сумма

$$\mathbf{a+b=b+a}$$
$$\mathbf{a+(b+c)=(a+b)+c}$$
$$\mathbf{a+0=a}$$



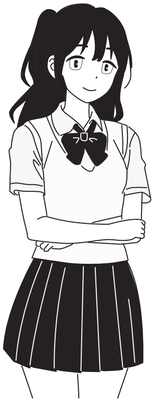
ВЫЧИТАНИЕ (ДЕЙСТВИЕ, ОБРАТНОЕ СЛОЖЕНИЮ)

$$a-b=c$$

уменьшаемое разность

вычитаемое

$$\mathbf{a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b}$$
$$\mathbf{(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)}$$
$$\mathbf{a-(b-c)=(a-b)+c}$$
$$\mathbf{a-0=a}$$
$$\mathbf{a-a=0}$$



УМНОЖЕНИЕ

$$a\cdot b=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ слагаемых}}$$

$$a\cdot b=c$$

множители

произведение

Вариант обозначения: $a\times b$.

$$\mathbf{a\cdot b=b\cdot a}$$
$$\mathbf{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$$
$$\mathbf{(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c}$$
$$\mathbf{(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c}$$
$$\mathbf{a\cdot 1=a}$$
$$\mathbf{a\cdot 0=0}$$

ДЕЛЕНИЕ (ДЕЙСТВИЕ, ОБРАТНОЕ УМНОЖЕНИЮ)

$$a:b=c$$

делимое

делитель

частное

$$(a:b):c=a:(b\cdot c)$$
$$a:(b:c)=(a:b)\cdot c$$
$$(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b$$
$$(a\cdot b):c=a\cdot(b:c)$$
$$a:a=1$$
$$a:1=a$$
$$0:a=0\ (a\neq 0)$$

Варианты обозначения: $\frac{a}{b}$ или a/b.

★ Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b.

★ Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b.

Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r, что $a=b\cdot q+r$ и $r<b$.

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

$$\begin{array}{r|l} -70 & 3 \\ \underline{6} & \overline{23} \\ -10 & \\ \underline{9} & \\ 1 & \end{array}$$

делитель

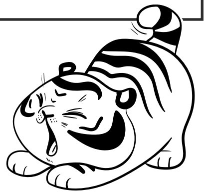
делимое

остаток

неполное частное

Проверка: $70=3\cdot 23+1$.

ВАЖНО! Остаток должен быть меньше делителя.



ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Выражение a^n называется **степенью числа** a.
Вторая степень числа называется **квадратом числа**, третья степень — **кубом числа**.

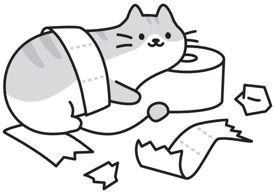
показатель степени

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}$$

основание степени

СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

$$a^1=a$$
$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\ \text{где } a\neq 0$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}$$
$$a^x\cdot b^x=(ab)^x$$
$$\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x,\ \text{где } b\neq 0$$



Для упрощения работы с большими числами в математике было придумано новое действие — возведение в степень. Множителей может быть очень много. Например, 5^{20} — это произведение 20 множителей, каждый из которых равен 5. Современным людям знание степени позволяет сэкономить время, а в древности оно помогало уменьшать ещё и финансовые затраты на записи, поскольку пергамен и папирус в Древней Греции стоили очень дорого.

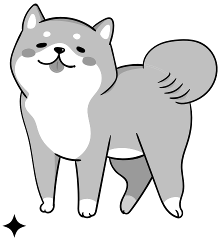
Сложение и вычитание, умножение и деление, а также возведение в степень и извлечение корня попарно представляют собой обратные действия. Свойства сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень представляют собой равенства, которые можно использовать не только слева направо, но и справа налево.

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**.

Только в результате сложения и умножения натуральных чисел получаются тоже натуральные числа.

ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ

- Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.
- Действия 2-й ступени: умножение и деление.
- Действия 3-й ступени: возведение в степень.



ВЫРАЖЕНИЯ БЕЗ СКОБОК

В выражении без скобок сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо.

Возведение в степень

умножение/деление

сложение/вычитание

✓ Запись решения в строчку:

④①②⑤⑥③

$\boxed{17-5\cdot6:3-2+4:2}=$

$=17-30:3-2+2=$

$=17-10-2+2=7-2+2=7.$

ВЫРАЖЕНИЯ СО СКОБКАМИ

В выражении со скобками сначала выполняют все действия в скобках, а затем действия большей ступени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий.

Действия в скобках
⌄
возведение в степень
⌄
умножение/деление
⌄
сложение/вычитание

✓ Запись решения по действиям:

$$\boxed{(3\overset{\textcircled{1}}{+}1)\overset{\textcircled{3}}{\cdot}2\overset{\textcircled{5}}{+}6^{\overset{\textcircled{2}}{2}}\overset{\textcircled{4}}{:}3\overset{\textcircled{6}}{-}7}=13$$

1) $3+1=4$;
2) $6^2=36$;
3) $4\cdot 2=8$;
4) $36:3=12$;
5) $8+12=20$;
6) $20-7=13$.

ДРОБИ

Дробь — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Число вида $\dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **обыкновенной дробью**.

$\dfrac{m}{n}$ ← числитель
← знаменатель

На древних вавилонских глиняных табличках и египетских папирусах встречаются не только натуральные числа, но и дроби. Этим источникам около 5000 лет. Первоначально применялись в основном обыкновенные дроби, они выражали результат измерения длины, площади и массы в тех случаях, когда выбранная единица измерения не укладывалась в целое число повторений.

Правильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, т. е. $m<n$.

Любая правильная дробь меньше единицы: $\dfrac{m}{n}<1$, если $m<n$.

✓ Правильные дроби: $\dfrac{3}{8}\,(3<8)$; $\dfrac{1}{5}\,(1<5)$.

Неправильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, т. е. $m \geq n$. Любая неправильная дробь больше единицы или равна ей:

$$\frac{m}{n} \geq 1, \text{ если } m \geq n.$$

- ✓ Неправильные дроби:

$$\frac{8}{3}\,(8>3);\quad \frac{5}{5}\,(5=5).$$

- ✓ Представление натурального числа в виде неправильной дроби:

$$4=\frac{4}{1} \quad \text{или} \quad 4=\frac{8}{2}.$$

Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c};\ \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c},\ c\neq 0}$$

ВАЖНО! При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным.

Сокращение дроби — действие перехода к новой дроби, равной заданной, но с меньшими числителем и знаменателем.

Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель на общий делитель, который больше 1.

- ✓ $\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$ (числитель и знаменатель дроби разделили на 2).

Несократимой называется дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа.

Сокращать дробь можно сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя либо несколько раз на общий делитель.

Приведение дроби к новому знаменателю — действие замены заданной дроби равной ей дробью, но с бо́льшими числителем и знаменателем.

- ✓ Сократим дробь $\frac{140}{175}$.
- ★ $140=2\cdot2\cdot5\cdot7$; $175=5\cdot5\cdot7$;
  НОД$(140;175)=5\cdot7=35$.
  Тогда $\frac{140}{175}=\frac{140:35}{175:35}=\frac{4}{5}$.
- ★ $\frac{140}{175}=\frac{140:5}{175:5}=\frac{28:7}{35:7}=\frac{4}{5}$.

Приведение к новому знаменателю используется при сложении, вычитании, сравнении обыкновенных дробей, а также при представлении обыкновенной дроби в виде десятичной.

✓ $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ (числитель и знаменатель дроби умножили на 25).

СМЕШАННЫЕ ЧИСЛА

Число, содержащее целую и дробную части, называется **смешанным.**

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ДРОБИ В ВИДЕ СМЕШАННОГО ЧИСЛА

Разделить числитель на знаменатель с остатком.

Неполное частное — это целая часть, остаток от деления — числитель, знаменатель остаётся прежним.

✓ $\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$, т. к. $17:7=2$ (ост. 3).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СМЕШАННОГО ЧИСЛА В ВИДЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ДРОБИ

Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель — получим числитель неправильной дроби.

Знаменатель остаётся прежним.

✓ $3\frac{5}{11}=\frac{3\cdot 11+5}{11}=\frac{38}{11}$.

!

Смешанное число — это сумма натурального числа и обыкновенной дроби, записанная без знака «+».

✓ $8\frac{1}{3}=8+\frac{1}{3}$.

Умение представлять смешанное число в виде неправильной дроби и переводить неправильную дробь в смешанное число необходимо для удобства выполнения различных математических операций. При сравнении, сложении и вычитании удобнее использовать смешанные числа, тогда как умножение, деление и возведение в степень проще выполнять с неправильными дробями.

СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ И СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

★ Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой числитель больше.

✓ $\frac{5}{12} > \frac{3}{12}$, т. к. $5 > 3$.

★ Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше.

✓ $\frac{5}{9} > \frac{5}{11}$, т. к. $9 < 11$.

СРАВНЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

★ Из двух смешанных чисел с разными целыми частями больше то число, у которого целая часть больше.

✓ $7\frac{3}{8} > 6\frac{9}{13}$, т. к. $7 > 6$.

★ Если целые части смешанных чисел равны, надо сравнить их дробные части по правилам сравнения обыкновенных дробей.

✓ $2\frac{3}{20} > 2\frac{1}{20}$, т. к. $\frac{3}{20} > \frac{1}{20}$.

Если у дробей разные знаменатели (числители), необходимо сначала с помощью основного свойства дроби привести их к одному знаменателю (числителю).

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ И СМЕШАННЫМИ ЧИСЛАМИ

СЛОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные.

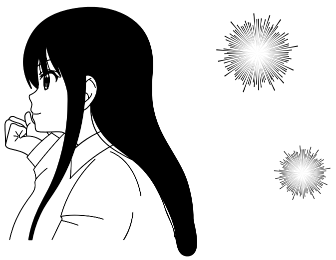
Сложить числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

✓ $\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9}{30} + \frac{14}{30} = \frac{23}{30}$.

✓ $\frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{4}{14} + \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

✓ $\frac{11}{15} + \frac{3}{10} = \frac{22}{30} + \frac{9}{30} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}$.

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить; если дробь неправильная, нужно представить её в виде смешанного числа.



СЛОЖЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Привести дробные части данных чисел к наименьшему общему знаменателю.

Отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно — дробных.

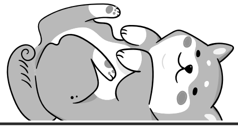
✓ $2\frac{3}{8}+5\frac{5}{12}=2\frac{9}{24}+5\frac{10}{24}=7\frac{19}{24}$.

✓ $7\frac{1}{6}+2\frac{5}{12}=7\frac{2}{12}+2\frac{5}{12}=9\frac{7}{12}$.

✓ $2\frac{7}{9}^{\backslash 2}+3\frac{5}{6}^{\backslash 3}=2\frac{14}{18}+3\frac{15}{18}=5\frac{29}{18}=6\frac{11}{18}$.

Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, нужно выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

ВЫЧИТАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ



Привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные.

Вычесть числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

✓ $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{1}{15}$.

✓ $\frac{5}{7}-\frac{3}{14}=\frac{10}{14}-\frac{3}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$.

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить.

ВЫЧИТАНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Привести дробные части данных чисел к наименьшему общему знаменателю.

Отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно — дробных.

✓ $3\frac{11}{12}-2\frac{5}{6}=3\frac{11}{12}-2\frac{10}{12}=1\frac{1}{12}$.

✓ $7\frac{5}{8}-4\frac{1}{6}=7\frac{15}{24}-4\frac{4}{24}=3\frac{11}{24}$.

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, нужно превратить её в неправильную дробь, уменьшив целую часть на единицу.

✓ $9\frac{2}{7}-3\frac{5}{7}=8\frac{7+2}{7}-3\frac{5}{7}=8\frac{9}{7}-3\frac{5}{7}=5\frac{4}{7}$.

✓ $9\frac{7}{15}^{\backslash 2}-2\frac{5}{6}^{\backslash 5}=9\frac{14}{30}-2\frac{25}{30}=8\frac{44}{30}-2\frac{25}{30}=6\frac{19}{30}$.

УМНОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Найти произведение числителей и произведение знаменателей данных дробей (произвести сокращение, если возможно): $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

↓

Первое произведение записать в числителе, второе — в знаменателе.

Если получилась неправильная дробь, нужно представить её в виде смешанного числа.

- ✓ $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$.
- ✓ $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{8}=\frac{4\cdot 5}{15\cdot 8}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}$.
- ✓ $\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{4\cdot 35}{5\cdot 6}=\frac{2\cdot 7}{1\cdot 3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$.

УМНОЖЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Записать смешанные числа в виде неправильных дробей.

↓

Найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей.

↓

Первое произведение записать в числителе, второе — в знаменателе.

- ✓ $2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{7\cdot 30}{3\cdot 7}=10$.
- ✓ $5\frac{1}{3}\cdot 4\frac{1}{20}=\frac{16\cdot 81}{3\cdot 20}=\frac{4\cdot 27}{1\cdot 5}=\frac{108}{5}=21\frac{3}{5}$.
- ✓ $1\frac{2}{5}\cdot 4\frac{4}{7}=\frac{7\cdot 32}{5\cdot 7}=\frac{32}{5}=6\frac{2}{5}$.

ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Чтобы разделить одну обыкновенную дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

- ✓ $\frac{8}{35}:\frac{4}{5}=\frac{8}{35}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2}{7}$.
- ✓ $\frac{4}{7}:\frac{8}{21}=\frac{4\cdot 21}{7\cdot 8}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

ДЕЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Записать смешанные числа в виде неправильных дробей.

↓

Делимое умножить на число, обратное делителю.

- ✓ $7\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}=\frac{15}{2}:\frac{5}{2}=\frac{15\cdot 2}{2\cdot 5}=3$.
- ✓ $2\frac{3}{5}:1\frac{6}{7}=\frac{13}{5}:\frac{13}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{7}{13}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$.