

А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

---

КОМПЛЕКСНАЯ  
ПОДГОТОВКА

К ОСНОВНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ  
ЭКЗАМЕНУ

---

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

АСТ  
Москва  
2024

УДК 373:51  
ББК 22.1я721  
М52

**Мерзляк, Аркадий Григорьевич.**

М52 ОГЭ : Математика : комплексная подготовка : к основному государственному экзамену : теория и практика / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва: Издательство АСТ, 2024. — 477, [3] с.: ил. — (Комплексная подготовка к ОГЭ).

ISBN 978-5-17-157377-5

Пособие содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на основном государственном экзамене. Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются экзаменационные задания — контрольные измерительные материалы ОГЭ.

Справочник состоит из двух глав: «Арифметика. Алгебра» и «Геометрия». Помимо теоретического материала в справочнике представлено значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач. Ко всем заданиям даны ответы для самопроверки.

В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте [fipi.ru](http://fipi.ru). Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Работа с пособием позволит повторить все основные темы курса математики за 5–9 классы и успешно подготовиться к сдаче ОГЭ.

УДК 373:51  
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-157377-5

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., 2023  
© ООО «Издательство АСТ», 2024

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	11
<b>ГЛАВА I. АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА</b> .....	13
<b>§ 1. Натуральные числа</b> .....	15
1.1. Десятичная запись натуральных чисел .....	15
1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем .....	16
1.3. Делимость натуральных чисел .....	18
1.4. Признаки делимости .....	19
1.5. Простые и составные числа .....	20
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное .....	21
1.7. Деление с остатком .....	23
<i>Примеры заданий № 1</i> .....	24
<b>§ 2. Дроби</b> .....	28
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей .....	28
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями .....	31
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей .....	32
2.4. Арифметические действия с десятичными дробями .....	33
2.5. Нахождение части от целого и целого по его части .....	35
2.6. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби .....	36
2.7. Округление чисел .....	37
<i>Примеры заданий № 2</i> .....	38
2.8. Проценты .....	41
2.9. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам .....	42
2.10. Отношение. Процентное отношение .....	43
2.11. Пропорции .....	45
2.12. Прямая и обратная пропорциональные зависимости ..	46
<i>Примеры заданий № 3</i> .....	47
<b>§ 3. Рациональные числа</b> .....	51
3.1. Целые числа. Рациональные числа .....	51

## Содержание

3.2. Координатная прямая . . . . .	52
3.3. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел . . . . .	52
3.4. Арифметические действия с рациональными числами . . . . .	54
<i>Примеры заданий № 4.</i> . . . . .	56
<b>§ 4. Целые выражения.</b> . . . . .	<b>60</b>
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения . . . . .	60
4.2. Свойства степени с натуральным показателем . . . . .	60
4.3. Одночлен . . . . .	62
4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной . . . . .	63
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов . . . . .	65
4.6. Квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов . . . . .	66
4.7. Формулы суммы кубов и разности кубов. . . . .	67
4.8. Разложение многочленов на множители . . . . .	68
<i>Примеры заданий № 5.</i> . . . . .	70
<b>§ 5. Дробные выражения</b> . . . . .	<b>74</b>
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби. . . . .	74
5.2. Тожество. Тожественные преобразования выражений . . . . .	75
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей . . . . .	75
5.4. Действия с алгебраическими дробями . . . . .	76
<i>Примеры заданий № 6.</i> . . . . .	79
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями. . . . .	84
5.6. Стандартный вид числа . . . . .	85
<i>Примеры заданий № 7.</i> . . . . .	86
<b>§ 6. Корень из числа</b> . . . . .	<b>89</b>
6.1. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень . . . . .	89
6.2. Свойства арифметического квадратного корня. . . . .	90
6.3. Тожественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни. . . . .	91
6.4. Корень третьей степени . . . . .	93

## Содержание

6.5. Запись корня с помощью степени с дробным показателем . . . . .	94
6.6. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел . . . . .	94
6.7. Понятие о множестве. Числовые множества. Множество действительных чисел . . . . .	95
<i>Примеры заданий № 8.</i> . . . . .	98
<b>§ 7. Уравнения с одной переменной</b> . . . . .	<b>103</b>
7.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной . . . . .	103
7.2. Линейное уравнение с одной переменной . . . . .	105
7.3. Квадратное уравнение . . . . .	106
7.4. Теорема Виета . . . . .	108
7.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители . . . . .	109
<i>Примеры заданий № 9.</i> . . . . .	111
7.6. Рациональные уравнения. . . . .	114
7.7. Метод замены переменной . . . . .	115
<i>Примеры заданий № 10.</i> . . . . .	117
<b>§ 8. Функции</b> . . . . .	<b>120</b>
8.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции . . . . .	120
8.2. Способы задания функции . . . . .	121
8.3. График функции . . . . .	123
8.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	125
8.5. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы. . . . .	127
8.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность . . . . .	129
8.7. Обратная пропорциональная зависимость. Функция $y = \frac{k}{x}$ , где $k \neq 0$ , и её свойства . . . . .	131
<i>Примеры заданий № 11.</i> . . . . .	133
8.8. Квадратичная функция и её свойства . . . . .	146
8.9. Функция $y = \sqrt{x}$ и её свойства . . . . .	150
8.10. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ . . . . .	151
8.11. Функция $y =  x $ и её свойства . . . . .	152

## Содержание

8.12. Решение уравнений графическим методом . . . . .	152
<i>Примеры заданий № 12.</i> . . . . .	154
<b>§ 9. Уравнения с двумя переменными</b> . . . . .	165
9.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения . . . . .	165
9.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом . . . . .	167
9.3. Методы решения систем двух уравнений с двумя переменными . . . . .	171
<i>Примеры заданий № 13.</i> . . . . .	174
<b>§ 10. Текстовые задачи</b> . . . . .	179
10.1. Решение текстовых задач с помощью уравнений . . . . .	179
<i>Примеры заданий № 14.</i> . . . . .	181
10.2. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений. . . . .	185
<i>Примеры заданий № 15.</i> . . . . .	187
10.3. Решение текстовых задач арифметическим способом . . . . .	189
<i>Примеры заданий № 16.</i> . . . . .	190
10.4. Практико-ориентированные задачи . . . . .	193
<i>Примеры заданий № 17 [Зонт]</i> . . . . .	199
<i>Примеры заданий № 18 [Лист]</i> . . . . .	205
<i>Примеры заданий № 19 [Печь]</i> . . . . .	210
<i>Примеры заданий № 20 [Шины]</i> . . . . .	216
<i>Примеры заданий № 21 [Квартира]</i> . . . . .	222
<b>§ 11. Неравенства</b> . . . . .	224
11.1. Числовые неравенства и их свойства. . . . .	224
11.2. Оценка значений числовых выражений с помощью свойств числовых неравенств . . . . .	226
11.3. Общие сведения о неравенствах с одной переменной . . . . .	228
11.4. Числовые промежутки . . . . .	229
11.5. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств . . . . .	230
11.6. Квадратные неравенства . . . . .	233
<i>Примеры заданий № 22.</i> . . . . .	235

<b>§ 12. Числовые последовательности.</b>	241
12.1. Понятие последовательности.	241
12.2. Способы задания последовательности.	242
12.3. Арифметическая прогрессия.	244
12.4. Сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии.	245
12.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов	246
12.6. Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии.	249
12.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы.	250
<i>Примеры заданий № 23.</i>	250
<b>§ 13. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики</b>	254
13.1. Комбинаторные задачи. Перебор вариантов.	254
13.2. Комбинаторные правила суммы и произведения.	256
13.3. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	257
13.4. Статистика. Статистические характеристики.	259
13.5. Частота и вероятность случайного события.	261
13.6. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности.	263
13.7. Представление о геометрической вероятности.	266
<i>Примеры заданий № 24.</i>	267
<b>ГЛАВА II. ГЕОМЕТРИЯ</b>	275
<b>§ 14. Простейшие геометрические фигуры и их свойства</b>	277
14.1. Прямая, луч, отрезок. Измерение отрезков.	277
14.2. Угол. Измерение углов.	279
14.3. Смежные и вертикальные углы.	280
14.4. Перпендикулярные прямые. Угол между пересекающимися прямыми. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой.	281
<i>Примеры заданий № 25.</i>	282

<b>§ 15. Параллельные прямые</b> . . . . .	286
15.1. Признаки параллельности прямых . . . . .	286
15.2. Свойства параллельных прямых . . . . .	287
<i>Примеры заданий № 26</i> . . . . .	289
<b>§ 16. Треугольник</b> . . . . .	291
16.1. Элементы треугольника. Равные треугольники . . . . .	291
16.2. Виды треугольников . . . . .	293
16.3. Признаки равенства треугольников . . . . .	294
16.4. Свойства равнобедренного треугольника . . . . .	296
16.5. Признаки равнобедренного треугольника . . . . .	297
16.6. Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника . . . . .	298
16.7. Неравенство треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника . . . . .	300
16.8. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника . . . . .	301
16.9. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках . . . . .	303
16.10. Средняя линия треугольника . . . . .	305
16.11. Подобные треугольники . . . . .	306
16.12. Признаки подобия треугольников . . . . .	307
<i>Примеры заданий № 27</i> . . . . .	309
16.13. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике . . . . .	315
16.14. Теорема Пифагора . . . . .	316
16.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника . . . . .	317
16.16. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от $0^\circ$ до $180^\circ$ . . . . .	320
16.17. Теорема косинусов . . . . .	322
16.18. Теорема синусов . . . . .	323
<i>Примеры заданий № 28</i> . . . . .	324
<b>§ 17. Окружность и круг</b> . . . . .	329
17.1. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры ГМТ . . . . .	329
17.2. Окружность и круг, их элементы . . . . .	330
17.3. Свойства элементов окружности . . . . .	332
17.4. Касательная и секущая к окружности . . . . .	333
17.5. Взаимное расположение двух окружностей . . . . .	335
17.6. Окружность, описанная около треугольника . . . . .	336

## Содержание

17.7. Окружность, вписанная в треугольник . . . . .	338
17.8. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности . . . . .	340
17.9. Длина окружности . . . . .	341
<i>Примеры заданий № 29</i> . . . . .	342
<b>§ 18. Многоугольник</b> . . . . .	<b>350</b>
18.1. Четырёхугольник и его элементы . . . . .	350
18.2. Параллелограмм и его свойства . . . . .	351
18.3. Признаки параллелограмма . . . . .	353
18.4. Прямоугольник, ромб, квадрат . . . . .	356
<i>Примеры заданий № 30</i> . . . . .	357
18.5. Трапеция. Средняя линия трапеции . . . . .	362
18.6. Четырёхугольник, вписанный в окружность . . . . .	364
18.7. Четырёхугольник, описанный около окружности . . . . .	365
18.8. Сумма углов выпуклого многоугольника . . . . .	366
18.9. Правильные многоугольники . . . . .	367
<i>Примеры заданий № 31</i> . . . . .	369
<b>§ 19. Площадь и объём</b> . . . . .	<b>376</b>
19.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника . . . . .	376
19.2. Площадь параллелограмма и трапеции . . . . .	377
19.3. Формулы для нахождения площади треугольника . . . . .	378
19.4. Площадь круга. Площадь сектора . . . . .	380
19.5. Формулы объёмов прямоугольного параллелепипеда, куба и шара . . . . .	381
<i>Примеры заданий № 32</i> . . . . .	381
<b>§ 20. Декартовы координаты на плоскости</b> . . . . .	<b>389</b>
20.1. Координатная плоскость . . . . .	389
20.2. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка . . . . .	390
20.3. Уравнение фигуры. Уравнение окружности . . . . .	392
20.4. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом . . . . .	394
20.5. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными . . . . .	396
<i>Примеры заданий № 33</i> . . . . .	396

## Содержание

<b>§ 21. Векторы на плоскости</b> . . . . .	400
21.1. Понятие вектора. Модуль вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы . . . . .	400
21.2. Координаты вектора . . . . .	402
21.3. Сложение и вычитание векторов . . . . .	404
21.4. Умножение вектора на число . . . . .	407
21.5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам . . . . .	408
21.6. Скалярное произведение векторов . . . . .	409
<i>Примеры заданий № 34.</i> . . . . .	411
<b>§ 22. Геометрические преобразования</b> . . . . .	416
22.1. Движение фигуры. Параллельный перенос . . . . .	416
22.2. Осевая симметрия . . . . .	417
22.3. Центральная симметрия . . . . .	419
22.4. Поворот . . . . .	422
22.5. Гомотетия. Подобие фигур . . . . .	424
<i>Примеры заданий № 35.</i> . . . . .	426
<b>Ответы к примерам заданий.</b> . . . . .	434
<b>ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ.</b> . . . . .	447
Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов основного государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ . . . . .	449
Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов основного государственного экзамена 2023 года по МАТЕМАТИКЕ . . . . .	450
Система оценивания экзаменационной работы по математике . . . . .	467
Образец бланков ответов . . . . .	475

## ПРЕДИСЛОВИЕ

На основной государственной экзамен (ОГЭ) по математике выносятся темы, рассматриваемые в курсах математики 5–6 классов, алгебры и геометрии 7–9 классов. Основой подготовки к ОГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–9 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Недобротва такого подхода очевидны: вопервых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; вовторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобнее использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках. Она представляет собой справочник для подготовки к ОГЭ по математике.

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ОГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.

Данный справочник выполняет также и свою традиционную роль — позволяет быстро найти нужную информацию: какими свойствами обладает степень с целым показателем, чему равна сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии, как найти дробь от числа, по какой формуле можно вычислить площадь трапеции и т. п.

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов и алгебры 7–9 классов основной школы, вторая глава «Геометрия» — содержанию курса геометрии 7–9 классов. Каждая из глав разбита на параграфы. Их содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ОГЭ по математике.

## Предисловие

Понятно, что для успешного написания ОГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в справочник включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ОГЭ по математике.

Большинство проверочных работ состоит из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

В конце пособия представлен демонстрационный экзаменационный вариант, опубликованный на сайте [fipi.ru](http://fipi.ru). Изучив решения каждого задания, вам будет проще самостоятельно справиться с подобными вариантами.

Желаем вам успешной сдачи основного государственного экзамена по математике.

*Авторы*

ГЛАВА I

---

**АРИФМЕТИКА.  
АЛГЕБРА**



## § 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

### 1.1. Десятичная запись натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**.

Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел** (или **натуральный ряд**). Первым числом натурального ряда является число 1, вторым — число 2, третьим — число 3 и т. д.

В натуральном ряде за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряде нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**. Этих цифр десять:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа. Например, в числе 172 цифра 7 обозначает число семьдесят, а в числе 7549 — обозначает число семь тысяч.

Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**.

Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе — **разрядом десятков**, третье — **разрядом сотен** и т. д. Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.