Умскул

ОГЭ Математика

★ Интенсивный курс ★

Готовься к экзаменам с Умскул

Данир Баев

Москва
2025

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
Б15

Баев, Данир.

Б15 ОГЭ. Математика / Данир Баев. — Москва : Эксмо, 2025. — 288 с. — (Готовься к экзаменам с Умскул).

ISBN 978-5-04-191903-0

В справочнике от популярной онлайн-школы «Умскул» ты найдёшь всё, что необходимо для успешной сдачи ОГЭ по математике!

Книга разложит по полочкам все темы школьного курса за 5—9 классы: ты сможешь запросто повторить уже изученный материал и получить новые знания. Только действительно нужная для экзамена информация по разделам «Корни, степени, формулы сокращённого умножения», «Неравенства. Логические утверждения», «Уравнения», «Решение текстовых задач», «Теория вероятностей», «Арифметическая и геометрическая прогрессии», «Графики», «Окружность», «Площади фигур. Треугольники» и «Четырёхугольники» преподносится наглядно и понятно, а также сопровождается примерами. Вместе с теорией приводятся разные типы экзаменационных заданий с подробными решениями.

Также пособие будет полезно учителям и репетиторам при планировании и проведении занятий.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-191903-0

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРА

Привет, дорогой выпускник 9-го класса! В этом году тебе предстоит сдавать экзамены. Основной государственный экзамен по математике — это важный этап в твоей школьной жизни, требующий хорошей подготовки и приложения усилий. Справочник, который ты сейчас читаешь, поможет заложить необходимую базу, повторить пройденные ранее темы и закрепить знания для успешной сдачи ОГЭ!

Математика — предмет, который не только содержит теоремы и различные свойства, но и окружает нас в повседневной жизни. Умение решать математические задачи развивает аналитическое мышление, логические способности и внимание к деталям, что крайне важно не только на экзамене, но и в становлении личности.

Данное пособие поможет погрузиться в увлекательный математический мир и лучше понять предмет. В книге вся необходимая на экзамене информация изложена простым языком. После изучения теоретического блока тебя ждёт разбор типовых экзаменационных заданий с подробными объяснениями. Такая структура книги поможет лучше вникнуть в каждую тему и чувствовать себя уверенным в своих знаниях!

Раздел 1

КОРНИ, СТЕПЕНИ, ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

Корни и их свойства

Квадратный корень — число, которое при возведении в квадрат даёт заданное число.

Пример: $\sqrt{9} = \pm 3$, так как $3^2 = (-3)^2 = 9$.

Арифметический квадратный корень — это неотрицательное число, которое при возведении в квадрат даёт подкоренное число.

Пример: $\sqrt{25} = 5; \sqrt{0} = 0$.

У функции $y = \sqrt{x}$ **каждому значению аргумента** x соответствует **единственное значение** y.

Свойства корней

Свойства 1, 2 и 3 справедливы при $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

1) $(\sqrt{a})^2 = a$

2) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

3) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0$

4) $\sqrt{a^2} = |a|$*

Важно знать!

* Но помните, что при вычислении арифметического квадратного корня в ответе должно быть неотрицательное число.

Примеры:

$(\sqrt{5})^2 = 5.$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 3} = \sqrt{900} = 30.$

Так нельзя: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}.$

Нужно так: $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$

ПРАКТИКА

1 Найдите значение выражения $\sqrt{3 \cdot 72} \cdot \sqrt{24}.$

Решение:

Разложим 72 и 24 на простые множители:

$72 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2,$

$24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$

Тогда $\sqrt{3 \cdot 72} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}.$

Применим свойство корней:

$$\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{3^4 \cdot 2^6} = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72.$$

Ответ: 72.

2 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{35}\cdot\sqrt{56}}{\sqrt{40}}$.

Решение:
Разложим 35, 56 и 40 на множители:
$35=5\cdot 7$,
$56=7\cdot 2\cdot 2\cdot 2=7\cdot 2^3$,
$40=5\cdot 2\cdot 2\cdot 2=5\cdot 2^3$.
Применим свойство корней:

$$\frac{\sqrt{35}\cdot\sqrt{56}}{\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{5\cdot 7\cdot 7\cdot 2^3}{5\cdot 2^3}}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 7.

3 Найдите значение выражения $4\sqrt{8}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}$.

Решение:
Разложим 8 и 40 на простые множители:
$8=2^3$,
$40=5\cdot 2^3$.
Тогда $4\sqrt{8}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}=4\sqrt{2^3}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5\cdot 2^3}$.
Применим свойство корней:

$$4\cdot 2\sqrt{2^3\cdot 5\cdot 5\cdot 2^3}=8\sqrt{5^2\cdot 2^6}=8\cdot 5\cdot 2^3=40\cdot 8=320.$$

Ответ: 320.

4 Найдите значение выражения $(\sqrt{32}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$.

Решение:
Разложим 32 на множители:
$32=16\cdot 2=4\cdot 4\cdot 2$.
Тогда $(\sqrt{4\cdot 4\cdot 2}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=(4\sqrt{2}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=$

$=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3\cdot 2=6$.

Ответ: 6.

5 Найдите значение выражения $\frac{96}{(4\sqrt{2})^2}$.

Решение:

$(4\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 2 = 32$, значит, $\frac{96}{(4\sqrt{2})^2} = \frac{96}{32} = 3$.

Ответ: 3.

6 Найдите значение выражения $\sqrt{(-14)^2}$.

Решение:

1-й способ. Заметим, что квадрат находится внутри корня, значит, подкоренное число будет положительное. Возведём -14 во 2-ю степень: $-14 \cdot (-14) = 196$, а $\sqrt{196} = 14$.

2-й способ. Вспомним свойство корней: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Тогда $\sqrt{(-14)^2} = |-14|$.

-14 — отрицательное число, модуль отрицательного числа равен противоположному числу, т.е. положительному, значит, 14.

Ответ: 14.

Степени и их свойства

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, где n — количество сомножителей.

a^n называется n-й степенью числа a,

где a — основание,

n — показатель степени.

Свойства степеней:

1) $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

Пример: $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$.

2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Пример: $\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4 = 16$.

3) $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$.

Пример: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$.

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Пример: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$.

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Пример: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} = 2,25$.

6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$.

Пример: $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

7) $\frac{1}{a^n} = a^{-n} (a \neq 0)$.

Пример: $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4 = 81$.

ПРАКТИКА

1 Найдите значение выражения $\frac{2^5}{2^{-1}}$.

Решение:

Применим свойство степеней: $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

Тогда получаем $\frac{2^5}{2^{-1}}=2^{5-(-1)}=2^{5+1}=2^6=64$.

Ответ: 64.

2 Найдите значение выражения $\frac{6^{-3}\cdot 6^{-5}}{6^{-9}}$.

Решение:

Применим свойства степеней: $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$ и $\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$.

Тогда получаем $\frac{6^{-3}\cdot 6^{-5}}{6^{-9}}=\frac{6^{-3+(-5)}}{6^{-9}}=\frac{6^{-8}}{6^{-9}}=6^{-8-(-9)}=6^{-8+9}=6$.

Ответ: 6.

3 Найдите значение выражения $\frac{(2b)^3\cdot b^{-13}}{5b^{-2}\cdot b^{-7}}$ при $b=4$.

Решение:

Преобразуем выражение: $\frac{(2b)^3\cdot b^{-13}}{5b^{-2}\cdot b^{-7}}=\frac{2^3b^3\cdot b^{-13}}{5b^{-2}\cdot b^{-7}}=$

$$=\frac{8b^{3+(-13)}}{5b^{-2+(-7)}}=\frac{8b^{3-13}}{5b^{-2-7}}=\frac{8b^{-10}}{5b^{-9}}=\frac{8}{5}b^{-10-(-9)}=\frac{8}{5}b^{-1}=\frac{8}{5b}.$$

Известно, что $b=4$, значит, $\frac{8}{5b}=\frac{8}{5\cdot 4}=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=0{,}4$.

Ответ: 0,4.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{(3^2\cdot 3^5)^4}{(3\cdot 3^2)^8}$.

Решение:

Применим свойства степеней: $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$ и $\dfrac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$.

$$\frac{(3^2\cdot 3^5)^4}{(3\cdot 3^2)^8}=\frac{(3^{2+5})^4}{(3^{1+2})^8}=\frac{(3^7)^4}{(3^3)^8}=\frac{3^{7\cdot 4}}{3^{3\cdot 8}}=\frac{3^{28}}{3^{24}}=3^{28-24}=3^4=81.$$

Ответ: 81.

5 Найдите значение выражения $\dfrac{3^6\cdot 4^5}{12^4}$.

Решение:

Разложим основание степени 12^4 на множители 3 и 4 и применим свойства степеней:

$$\frac{3^6\cdot 4^5}{12^4}=\frac{3^6\cdot 4^5}{(3\cdot 4)^4}=\frac{3^6\cdot 4^5}{3^4\cdot 4^4}=3^{6-4}\cdot 4^{5-4}=3^2\cdot 4=9\cdot 4=36.$$

Ответ: 36.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{(y^4)^3\cdot x^{10}}{(y\cdot x)^{11}}$ при $x=\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$.

Решение:

Применим свойства степеней: $(ab)^n=a^nb^n$, $\dfrac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ и $(a^n)^k=a^{n\cdot k}$.

$$\frac{(y^4)^3\cdot x^{10}}{(y\cdot x)^{11}}=\frac{y^{4\cdot 3}\cdot x^{10}}{y^{11}\cdot x^{11}}=\frac{y^{12}\cdot x^{10}}{y^{11}\cdot x^{11}}=y^{12-11}\cdot x^{10-11}=y^1\cdot x^{-1}=\frac{y}{x}.$$

Известно, что $x=\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}$, значит, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$.

Ответ: 2.

7 Найдите значение выражения $(a^4)^{-3} : a^{-14}$ при $a = 3$.

Решение:

Применим свойства степеней: $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ и $(a^n)^m = a^{mn}$.

$(a^4)^{-3} : a^{-14} = a^{-3\cdot 4} : a^{-14} = a^{-12} : a^{-14} = a^{-12-(-14)} = a^{-12+14} = a^2$.

Известно, что $a = 3$, значит, $a^2 = 3^2 = 9$.

Ответ: 9.

8 Найдите значение выражения $\frac{28^n}{2^{2n-2} \cdot 7^{n-1}}$.

Решение:

$$\frac{28^n}{2^{2n-2} \cdot 7^{n-1}} = \frac{(2^2 \cdot 7)^n}{2^{2n-2} \cdot 7^{n-1}} = \frac{(2^2)^n \cdot 7^n}{2^{2n-2} \cdot 7^{n-1}} = \frac{2^{2n} \cdot 7^n}{2^{2n-2} \cdot 7^{n-1}} = \frac{2^{2n}}{2^{2n-2}} \cdot \frac{7^n}{7^{n-1}} =$$

$$= 2^{2n-(2n-2)} \cdot 7^{n-(n-1)} = 2^{2n-2n+2} \cdot 7^{n-n+1} = 7 \cdot 2^2 = 28.$$

Ответ: 28.

Формулы сокращённого умножения

Формулы сокращённого умножения (ФСУ) — формулы, с помощью которых можно представить некоторые выражения в виде произведения и наоборот — некоторые произведения в виде выражения, не раскрывая скобки и не приводя подобные слагаемые.

Формулы сокращённого умножения

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ — разность квадратов двух чисел

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности двух чисел

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы двух чисел

$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$ — сумма кубов двух чисел

$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$ — разность кубов двух чисел

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ — куб суммы двух чисел

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ — куб разности двух чисел

ПРАКТИКА

1 Найдите значение выражения $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

Решение:

Свернём скобки по формуле разности квадратов: $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$.

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2.$

Ответ: 2.

2 Найдите значение выражения $(\sqrt{5}+9)^2-18\sqrt{5}$.

Решение:

Раскроем скобку по формуле квадрата суммы:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$(\sqrt{5}+9)^2-18\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2+2\cdot9\cdot\sqrt{5}+81-18\sqrt{5}=5+81=86.$

Ответ: 86.

3 Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt{17}-4}-\frac{1}{\sqrt{17}+4}$.

Решение:

1. Приведём к общему знаменателю дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{17}-4}-\frac{1}{\sqrt{17}+4}=\frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}-\frac{\sqrt{17}-4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}=$$